MIKRO-
ÖKONÓMIA
ELŐADÁSVÁZLATOK

17. előadás

DUALITÁS

Kertesi Gábor – Világi Balázs

Varian 19. és 20. fejezete erősen átdolgozva

17.1 Bevezető

– Mint az előző előadás során láttuk, a profitmaximalizálási feladathoz két szemléletben is közelíthetünk.

(a) A feladatot megoldhatjuk közvetlenül. Ilyenkor a bevétel és a költségek különbözetét (a profitot) egy lépésben maximalizáljuk úgy, hogy közben adottságként figyelembe vessszük a termelési függvényt, amely a ráfordítások és kibocsátás közti technológiai összefüggéseket testesíti meg. Ezt a módszert **közvetlen eljárásnak** nevezzük. A közvetlen eljárás során a vállalat szimultán módon határozza meg optimális tényezőfelhasználását és optimális kibocsátását.

(b) A feladatot azonban két lépésben is megoldhatjuk: **1.** *első lépésben* meghatározzuk a legolcsóbb termelési eljárást, amely egy előre rögzített kibocsátási szint elérését lehetővé teszi (költségminimalizálás); majd **2.** az így kapott termelési eljárást alapul véve, meghatározzuk azt az outputszintet, amely mellett a vállalat profitja maximális lesz. Ezt az módszert **közvetett eljárásnak** nevezzük. A közvetett eljárás során a vállalat az 1. lépésben meghatározza az előre rögzített kibocsátási szint elérését biztosító optimális tényezőfelhasználását, a 2. lépésben pedig meghatározza optimális kibocsátását.

– De miért járjuk be ezt a **kerülőutat**, ha egyszer a közvetlen megoldás révén is meghatározhatnánk a vállalat döntési problémájának mindazokat az ismeretlenjeit, amelyek a vállalat viselkedésének előrejelzéséhez szükségesek? Azért, mert a kerülőút bejárásával olyan elemzési eszközök és mérési eljárások birtokába juthatunk, melyeknek segítségével a termelés-, illetve kínálatelmélet számos problémáját jóval egyszerűbben ragadhatjuk meg, mintha a direkt profitmaximalizálási feladat megoldásának útját követnénk. A költségminimalizálási feladat eredményét magába sűrítő **költségfüggvény** lesz az az elemzési eszköz, amelyre a vállalati, majd a piaci kínálati függvény megkonstruálásakor alapvetően támaszkodunk. Nem árt tehát e helyütt felidézni, milyen célból állítottuk fel a versenyzői piacon tevékenykedő profitmaximalizáló vállalat racionális modelljét. Mint az egész termeléselméleti blokk bevezetőjében hangsúlyoztuk: célunk éppen az, hogy a versenyzői piac első félévben felállított modelljét a kínálati oldal elemzésével teljessé tegyük. A következő három előadás során majd lépésről-lépésre világossá válik, milyen fontos szerepet tölt be a piac kínálati oldalának leírásában a költségfüggvényből származtatható vállalati kínálati függvény, majd a vállalati kínálatok aggregálása révén megkonstruálható **piaci kínálati függvény**.

– Mielőtt azonban a piaci kínálati függvény felé vezető érvelésünket tovább folytatnánk, két fontos kérdésre válaszolnunk kell:

(a) Képesek vagyunk-e igazolni azt az állításunkat, hogy a profitmaximalizálási feladat közvetett eljáráson nyugvó megoldása *valóban ugyanarra az eredményre vezet*, mint a közvetlen eljárás?

(b) Vajon jogosan feltételezzük-e – mint ahogy a következő előadások érvelése során valóban feltesszük –, hogy a költségminimalizálási feladat eredményeként kapott költségfüggvény *valóban ugyanolyan jól leírja* a vállalat technológiáját, mint a közvetlen eljárás alapjául szolgáló termelési függvény? Kimutathatók-e a termelési technoló-giákra jellemző jellegzetes tulajdonságok valamilyen egyértelmű módon a költségfüggvény tulajdonságaiban is?

– E kérdések tisztázásának fontossága kézenfekvő. Ha nem tudnánk igazolni ezeket az állításokat, nem lenne jogos a profitmaximalizálási probléma *közvetlen* megoldása helyett a *közvetett* megoldás kerülőútját követnünk, és nem lenne jogos a *költségfüggvény* felől továbblépnünk a *kínálati* elmélet felé. Továbbá: ha nem tudnánk igazolni azt, hogy a költségfüggvény maradéktalanul magában hordozza mindazokat a technológiai információkat, melyeket a termelési függvény is magában hordoz, akkor információ-veszteség vagy információtorzulás nélkül nem helyettesíthetnénk a termelési függvényt a költségfüggvénnyel a kínálati elmélet felépítése során. A **dualitási szemlélet** érvényesítése a termeléselmélet területén azt jelenti, hogy mindezeket a kérdéseket világosan exponáljuk, és az elmélet fogalmai között megbúvó azonosságokra és szimmetria-tulajdonságokra rámutatunk. A dualitási problémák következetes végiggondolása azzal a pótlólagos előnnyel jár, hogy világosabb lesz előttünk az elmélet logikai szerkezete.

– Elsőként tehát igazolni fogjuk, hogy a profitmaximalizálási feladat közvetlen és közvetett eljáráson nyugvó megoldása azonos eredményre vezet.

17.2 A profitmaximalizálási feladat közvetlen és közvetett megoldása

17.1 fólia

– Tekintsük mindenekelőtt a kétfajta eljárás logikáját szemléltető 17.1. ábrát. Menjünk végig először a **közvetlen eljárás** logikai lépésein: (a) behelyettesítjük a termelési függvényt a célfüggvénybe, és meghatározzuk a kétváltozós feltétel nélküli maximalizálási feladat elsőrendű feltételeit[1]; (b) az elsőrendű feltételek egyenletrendszerét megoldva, az optimális tényezőfelhasználást kifejezve, meghatározzuk a vállalat tényezőkeresleti függvényeit ($\tilde{x}_i(w_1, w_2, p)$); (c) a tényezőkeresleti függvényeket visszahelyettesítve a termelési függvénybe, meghatározzuk a vállalat optimális kibocsátását ($\tilde{y}$); illetve (d) a kibocsátást az *outputár és a tényezőárak függvényében kifejezve, meghatározzuk* a vállalat outputkínálati függvényét ($y(p, w_1, w_2)$).

– Most kövessük nyomon a **közvetett eljárást**! *1. lépés: költségminimalizálás*: (a) kiválasztunk egy kibocsátási szintet (y^*), és megkeressük azt a tényezőkombinációt, amelyel ezt a kibocsátást a lehető legkisebb költséggel képesek vagyunk megtermelni; meghatározzuk e feltételes költségminimalizálási feladat elsőrendű feltételeit; (b) az elsőrendű feltételek egyenletrendszerét megoldva, az optimális tényezőfelhasználást kifejezve, meghatározzuk a vállalat *feltételes* tényezőkeresleti függvényeit ($x_i^*(w_1, w_2, y^*)$); (c) a feltételes tényezőkeresleti függvényeket visszahelyettesítjük a célfüggvénybe, és meghatározzuk a vállalat költségfüggvényét ($c(w_1, w_2, y)$). *2. lépés: a maximális profitot biztosító kibocsátási szint megválasztása*: (d) a költségfüggvény felhasználásával újrafogalmazzuk, és megoldjuk a profitmaximalizálási feladatot: meghatározzuk a feladat elsőrendű feltételét; (e) az elsőrendű feltételből kifejezve a kibocsátást, meghatározzuk a vállalat kínálati függvényét ($y(p, w_1, w_2)$).

[1] Ha konkáv termelési függvényből indultunk ki, a maximum másodrendű feltételei is teljesülnek.

– Egy fontos dualitási eredményhez juthatunk el, ha elvégezzük a következő egyszerű gyakorlatot.[2] Ha a közvetlen eljárás során meghatározott optimális kibocsátás szintjén rögzítjük a költségminimalizálási feladatban elérni kívánt kibocsátást; vagyis ha a közvetett eljárás során olyan y^* értékből indulunk ki, amely épp egyenlő $\widetilde{y}$ -mal, akkor a költségminimalizálási feladat megoldásaként kapott optimális tényezőfelhasználások (x_i^*) megegyeznek a közvetlen eljárás alkalmazása révén kapott optimális tényezőfelhasználásokkal ($\widetilde{x}_i$). Ha tehát: $y^* = \widetilde{y}$, akkor: $x_i^* = \widetilde{x}_i$. Ezt a gyakorlatot bárki elvégezheti egy Cobb-Douglas termelési függvény példáján.

17.3 A profitmaximalizálási feladat közvetlen és közvetett megoldása azonos eredményre vezet

17.2 fólia

– Hasonlítsuk össze most a kétfajta eljárást technikai szempontból. A hasonlóságok kidomborítása érdekében írjuk föl *hasonló módon* (Lagrange-feladatként) a költségminimalizálási feladatot és a közvetlen eljárással megfogalmazott profitmaximalizálási feladatot! A költségminimalizálási feladat Lagrange-feladatként való felírása nem újdonság; a múlt órán is így oldottuk meg. A közvetlen eljárás alkalmazása során azonban a múlt órán használt behelyettesítéses módszert most Lagrange-technikával cseréljük föl.

– A közvetlen eljárásnál így most négy döntési változónk (x_1, x_2, λ és y) és négy elsőrendű feltételünk, a költségminimalizálási feladatnál pedig három döntési változónk (x_1, x_2, λ) és három elsőrendű feltételünk van. A közvetett eljárás azonban a költségminimalizálási feladat eredményeként kapott költségfüggvény segítségével újrafogalmazza az eredeti profitmaximalizálási feladatot. Ha az ebben szereplő döntési változó (y) elsőrendű feltételét is csatoljuk a közvetett eljárás során kapott elsőrendű feltételekhez, akkor a kétfajta eljárás elsőrendű feltételeinek szisztematikus összehasonlításával megvizsgálhatjuk azt az állításunkat, mely szerint a két eljárás eredménye egybeesik.

– Az x_1, x_2, λ szerinti elsőrendű feltételek valóban azonosak. A kibocsátási érték (y) szerinti elsőrendű feltétel azonban – első pillantásra – különbözőnek tűnik: a közvetlen eljárásnál a $p = \lambda$, a közvetett eljárásnál pedig a $p = MC$ elsőrendű feltételt kapjuk.

– A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy $\lambda = MC$. Vagyis: igazoljuk, hogy a költségminimalizálási problémához tartozó Lagrange-együttható épp a költségfüggvény kibocsátás szerinti parciális deriváltjával (vagyis: a határköltséggel) egyenlő. Ily módon egyszersmind azt is belátjuk, hogy a közvetlen és a közvetett eljárás elsőrendű feltételei rendre megegyeznek, s így a két eljárás azonos eredményhez vezet.

17.3 fólia

– Írjuk föl, és oldjuk meg a költségminimalizálási feladatot! A feltételes tényezőkeresleti függvények meghatározásával írjuk föl a költségfüggvényt, majd differenciáljuk a

[2] E gyakorlat logikáját jelzik a két eljárás oszlopai között szaggatott vonallal behúzott nyilak és a hozzájuk rendelt összefüggések.

költségfüggvényt y szerint. A (8)-as egyenlet bal oldalán így megkapjuk a határköltséget. A jobb oldalra helyettesítsük be a költségminimalizálási feladat x_1 és x_2 szerinti elsőrendű feltételeit. Egyszerű azonos átalakítások után megkapjuk a bizonyítani kívánt eredményt: $\lambda = MC$. Vagyis a következő előadások során jogosan követjük a profitmaximalizálási probléma *közvetlen* megoldása helyett a *közvetett* megoldás kerülőútját, és jogosan járunk el, ha a *költségfüggvény* felől lépünk tovább a *kínálati* elmélet felé.

17.4 A termelési függvény és a költségfüggvény hozadéki viszonyainak dualitása

– Az előzőekben láttuk, hogy a vállalatok profitmaximalizálási feladatának kétféle (közvetlen és közvetett) megoldása ugyanarra az eredményre vezet. A közvetlen módszer során a *termelési függvény*ből kiindulva egy lépésben, a közvetett megoldásban pedig a *költségfüggvény* fogalmának bevezetésével két lépésben jutottunk el a közös végeredményhez. Nyilvánvalónak tűnik, hogy a kétféle megközelítés középpontjában levő termelési- és költségfüggvény között igen szoros kapcsolat van.

– E kapcsolat szemléltetése érdekében tételezzük fel, hogy termelési függvényünk *homotetikus*, vagyis hogy a hozzá tartozó izokvantok sugarasan párhuzamosak.[3] Ez a gondolatmenet szempontjából ugyan nem szükséges feltételezés, mert a bemutatni kívánt tulajdonság (határértékben) minden termelési- és költségfüggvény esetében igaz, ám nagyban megkönnyíti a geometriai szemléltetést. Mivel az általános esetre érvényes bizonyítás bonyolult, mi megelégszünk azzal, hogy a homotetikus esetre nézve, egy példa erejéig, geometriailag szemléltetjük állításunkat.

17.4 fólia
17.5 fólia

– Elsőként tételezzük fel, hogy a rögzített inputárarányok mellett $y = 10$ egységnyi kibocsátásnál a költségminimalizálási feladat megoldásaként adódó optimális tényezőfelhasználás értéke $x_1^* = 3$ és $x_2^* = 1$. Tegyük fel továbbá, hogy változatlan inputárak mellett az $y' = 30$-as termelési szinthez tartozó optimális tényezőfelhasználás értéke $x_1^* = 6$ és $x_2^* = 2$.

– A 17.4 ábrán jól látszik, hogy a termelési függvény izokvantjai sugarasan párhuzamosak. Ez azzal a következménnyel jár, hogy az az optimális tényezőarány (bármely termelési szint mellett) állandó: esetünkben 3 az 1-hez. Levonhatjuk továbbá azt a következtetést is, hogy a termelési függvényünk a vizsgált tartományban *növekvő mérethozadékú*: a felhasznált inputok mennyiségének megduplázásával a kibocsátást háromszorosára tudtuk növelni.

17.6 fólia

[3] A sugarasan párhuzamos izokvantok geometriailag annyit jelentenek, hogy ha egy origóból induló sugár mentén vizsgáljuk a meredekségüket, akkor az adott pontban az izokvanthoz húzott érintő meredeksége állandó. Ennek az a következménye, hogy változatlan inputár-arányok esetén a különböző termelési szintekhez tartozó *optimális* tényezőfelhasználások aránya (x_2^* / x_1^*) állandó.

– Állandó tényezőarányok esetén a *termelési függvényt* ábrázolhatjuk a múlt órán megismert skálafüggvény segítségével. Tekintsük az $x_1^* = 3$, $x_2^* = 1$ pontot kiindulási pontnak, és ábrázoljuk az $y = f(tx_1^*, tx_2^*) = g(t \mid x_1^* = 3, x_2^* = 1)$ skálafüggvényt *t* és *y* változók terében! A függvény két pontját meghatározhatjuk az izokvant-térkép alapján: $t = 1$ esetén $y = f(3;1) = 10$, $t = 2$ esetén pedig $y = f(6;2) = 30$. Ezt a függvényt ábrázoltunk a 17.6. fólia bal fölső részében.

– Hasonlóképpen ábrázolhatjuk a *költségfüggvényt* is. A példaként választott esetben, $y = 10$ volumenű kibocsátás és rögzített (w_1, w_2) inputárak mellett a költségfüggvény értéke $c(10) = c(10, w_1, w_2) = \;\; w_1 x_1^* + w_2 x_2^* = 3w_1 + w_2$; $y' = 30$ volumenű kibocsátásnál pedig $c(30) = c(30, w_1, w_2) = 6w_1 + 2w_2$ lesz. Vagyis $c(30) = 2c(10)$. Ezt a függvényt látjuk a 17.6. fólia jobb fölső részében.

– Ha összevetjük egymással a példaként bemutatott termelési függvényt és költségfüggvényt, azt látjuk, hogy növekvő mérethozadékú termelési függvény esetében a költségfüggvény olyan, hogy a költségek a kibocsátás függvényében a *lineárisnál kisebb mértékben* nőnek.

– Hasonló módon megvizsgálhatjuk a többi esetet – a csökkenő és az állandó mérethozadékú termelési függvényt – is. Ehhez nem kell mást tennünk, mint a 17.4. fólián szereplő izokvantokhoz tartozó termelési szintek értékét megváltoztatnunk. *Csökkenő mérethozadékú termelési függvényt* kapunk, ha az alsó izokvanthoz tartozó termelési szint változatlanul hagyása mellett ($y = 10$), a felső izokvanthoz tartozó termelési szintet $y' = 15$-re változtatjuk. Azért csökkenő ez esetben a mérethozadék, mert az inputfelhasználás megduplázásával csak másfélszeresére tudjuk a termelést növelni.

– A skálafüggvény segítségével itt is könnyen bemutatható a termelési függvény és a költségfüggvény közti összefüggés. Tekintsük a 17.6. ábra középső részét! A termelési függvény pontjai ekkor a *t* és *y* terében értelemszerűen a (1;10) és (2;15) pontok lesznek, a megfelelő költségfüggvénynél pedig a $c(15) = 2c(10)$ egyenlőség teljesül. Csökkenő hozadékú termelési függvény esetében a költségfüggvény olyan, hogy a költségek a kibocsátás függvényében a *lineárisnál nagyobb mértékben* nőnek.

– Végezetül *állandó mérethozadékú termelési függvényt* szemlélte-tünk, ha a 17.4. ábrán a felső izokvanthoz tartozó termelési szintet $y' = 20$-ra változtatjuk, hiszen ekkor az inputfelhasználás megkétszerezésével a kibocsátást pontosan kétszeresére tudjuk növelni. Ebben az esetben a 17.6. ábra alsó részében látható görbékhez jutunk. A termelési függvény pontjai ekkor a *t* és *y* terében a (1;10) és (2;20) pontok lesznek, a költségfüggvény esetében pedig a $c(20) = 2c(10)$ egyenlőség teljesül. Állandó mérethozadékú termelési függvény esetében a költségfüggvény a kibocsátás lineáris függvénye lesz.

– A fenti állítások kifejezhetők az **átlagköltségfüggvény** segítségével is. Az átlagköltség nem más, mint az *y* mennyiségű kibocsátás egy egységére jutó költség. Vagyis:

17. 7 fólia

– Ha a technológia állandó mérethozadékú, akkor a kibocsátás egységére jutó költség állandó: az átlagköltség állandó. Ha a technológia növekvő mérethozadékú, akkor a költségek a kibocsátás függvényében a lineárisnál kisebb mértékben nőnek; így az átlagköltség a kibocsátás növekedésével csökkenő lesz. Ha a technológia csökkenő mérethozadékú, az átlagköltségnek a kibocsátás növekedésével emelkednie kell.

– Egy adott technológiának lehetnek növekvő, állandó és csökkenő mérethozadékú szakaszai: a kibocsátás nőhet nagyobb, egyenlő és kisebb mértékben, mint a vállalati tevékenység mérete. Ezzel párhuzamosan a költségfüggvény is nőhet lassabban, azonos mértékben vagy gyorsabban, mint a kibocsátás. Ez maga után vonja azt, hogy az átlagköltség is csökkenhet, állandó maradhat és növekedhet a kibocsátás különböző szintjein.

17.8 fólia

– A 17.8. ábrán a skálafüggvény segítségével ábrázoltunk egy – bizonyos mérettartományban $(0 < t < \hat{t})$ – növekvő, majd e mérettartomány fölött csökkenő mérethozadékú termelési függvénnyel jellemezhető vállalatot. A fólia alsó két ábráján bemutatjuk az ehhez az esethez tartozó költségfüggvényt és átlagköltség-függvényt. Ezek a görbék még hasznunkra lesznek a vállalat kínálati görbéjének megkonstruálása során.

– Homotetikus – sugarasan párhuzamos izokvantokkal jellemezhető – termelési függvény segítségével bemutattuk: a termelési függvény és a költségfüggvény tulajdonságai között inverz összefüggés áll fenn: ha a termelési függvény növekvő mérethozadékú, akkor a átlagköltség csökkenő; ha csökkenő mérethozadékú, akkor a átlagköltség növekvő. Állandó mérethozadék esetén az átlagköltség is állandó. Belátható, hogy ez az állítás – tetszőlegesen kicsi változásokat vizsgálva, tehát *lokálisan* – *tetszőleges* termelési és költségfüggvényre nézve is igaz. Általánosabban vizsgálódva, a termelési függvények és költségfüggvények közötti kapcsolat nem csupán a mérethozadékok vizsgálatával mutatható ki, hanem számos egyéb ponton is. Ezen összefüggések bemutatása azonban túlmutatna kurzusunk keretein.

– Általánosabb szinten az is belátható, hogy a termelési függvény és a költségfüggvény között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn: minden termelési függvényhez egy és csakis egy költségfüggvény tartozik, és minden költségfüggvényhez is egy és csakis egy termelési függvény tartozik. A termelési függvények és a belőlük levezetett költségfüggvények információtartalma megegyezik: a vállalat technológiáját egyenértékűen írják le. Vizsgálódásaink során tehát ugyanolyan joggal indulhatunk ki a termelési függvényből vagy a költségfüggvényből, ha egy vállalat technológiáját kívánjuk jellemezni. Eredményeink azonosak lesznek, akár az egyik, akár a másik utat választjuk.

17.5 Áttekintés a különböző időtávú termelési függvényekről és költségfüggvényekről

– Mielőtt továbblépnénk, célszerűnek tűnik egy rövid áttekintést adni a termeléselmélet eddigi kifejtése során bevezetett fontosabb fogalmakról. A 17.9. fólián táblázatos formában összefoglaltuk az eddigiekben bevezetett fontosabb új fogalmakat.

17.9 fólia

– A táblázat **oszlopaiban** aszerint rendeztük fogalmainkat, hogy rövid vagy hosszú távú összefüggéseket kívánunk velük leírni. Bizonyára valamennyien emlékeznek rá: rövid távnak neveztük a gazdasági döntéseknek azt az időhorizontját, amikor bizonyos termelési tényezők felhasználását a vállalat nem képes szabadon változtatni. Rövid távon bizonyos tényezők felhasználása rögzített. Hosszú távnak neveztük azt az időhorizontot, amikor a vállalat valamennyi termelési tényezőjének felhasználását szabadon képes változtatni. A rövid távon rögzített tényezőket állandó tényezőknek, a szabadon változtatható tényezőket változó tényezőknek neveztük.

– A táblázat **soraiban** aszerint rendeztük fogalmainkat, hogy a technológia leírását a termelési függvény vagy a költségfüggvény alkalmazásával kívánjuk-e megoldani. (Mint a mai előadásból remélhetőleg kiderült, a két megoldás teljesen egyenértékű.) A (rövid távú) termelési függvény állandó tényezőjének a (rövid távú) költségfüggvény állandó költsége, a (rövid és hosszú távú) termelési függvény változó tényezőinek a (rövid és hosszú távú) költségfüggvény változó költsége felel meg.

– A táblázatnak a költségfüggvényt, illetve a költségfajtákat tartalmazó részében azt az esetet is bemutatjuk, amikor a költségfüggvényben a *tényezők árait állandónak* tekintjük. A rövid illetve hosszú távú költségfüggvénynek ilyenkor egyetlen argumentuma van: a termelés volumene (y). A költségfüggvényt ez esetben két dimenzióban (y és c terében) ábrázolni tudjuk. Az így ábrázolt költségfüggvényeket *költséggörbéknek* nevezzük. A következő előadás során a költséggörbék diszkusszióját végezzük el. A vállalat költség-viszonyainak taglalása révén írjuk le a vállalat technológiáját, és ezen keresztül jutunk majd el (két hét múlva) a vállalati szintű kínálati függvényhez.

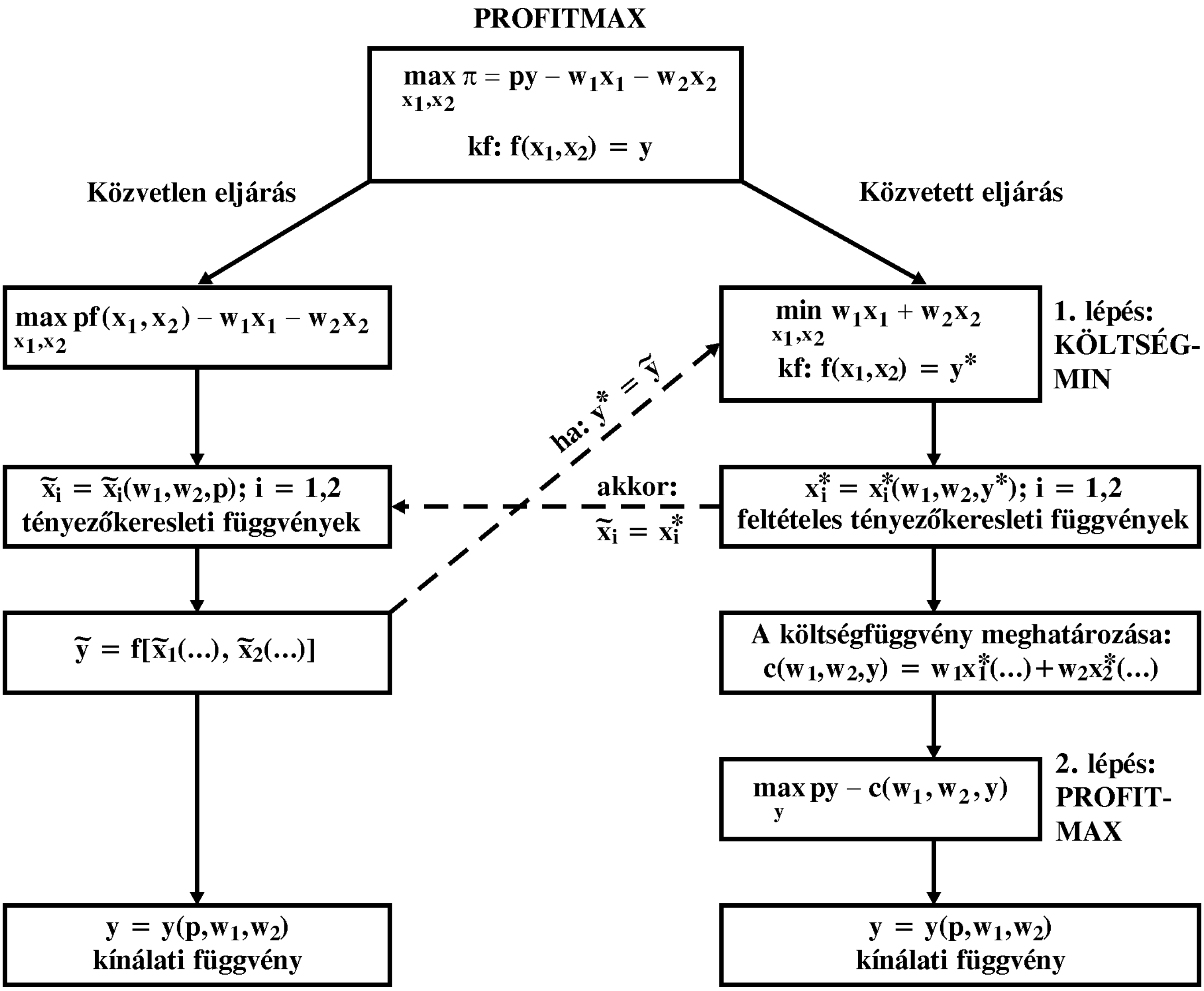
17. előadás

DUALITÁS

MELLÉKLET

Kertesi Gábor – Világi Balázs

17.1
Dualitás (1)



17.2
Dualitás (2)

PROFITMAX

$$\max_{x_1,x_2} \pi = py - w_1x_1 - w_2x_2$$

$$\text{kf: } f(x_1,x_2) = y$$

Közvetlen eljárás

$$\max_{x_1,x_2,\lambda,y} \mathcal{L} = py - w_1x_1 - w_2x_2 - \lambda(y - f(x_1,x_2))$$

ERF:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1: & -w_1 + \lambda\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ x_2: & -w_2 + \lambda\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \\ \lambda: & -y + f(x_1,x_2) = 0 \\ y: & p - \lambda = 0 \end{array}\right.$$

Közvetett eljárás

$$\min_{x_1,x_2,\lambda} \mathcal{L} = w_1x_1 + w_2x_2 - \lambda(f(x_1,x_2) - y)$$

1. lépés: KÖLTSÉGMIN

ERF:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1: & w_1 - \lambda\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ x_2: & w_2 - \lambda\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \\ \lambda: & f(x_1,x_2) - y = 0 \end{array}\right.$$

(Az x_1, x_2, λ feltételek: $\Longleftrightarrow$)

Az elsőrendű feltételek segítségével meghatározzuk a költségfüggvényt:

$$c(w_1,w_2,y) = w_1x_1^*(w_1,w_2,y) + w_2x_2^*(w_1,w_2,y)$$

$$\max_{y} py - c(w_1,w_2,y)$$

2. lépés: PROFITMAX

ERF:

$$y: \quad p - \frac{\partial c(w_1,w_2,y)}{\partial y} = 0$$

$$p - \lambda = 0 \quad \overset{?}{\Longleftrightarrow} \quad p - \frac{\partial c(w_1,w_2,y)}{\partial y} = 0$$

17.3/1

$\lambda = MC = \dfrac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y}$. Bizonyítás

Írjuk föl a költségminimalizálási feladatot:

$$\min_{x_1, x_2, \lambda} \mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda(f(x_1, x_2) - y) \qquad (1)$$

Elsőrendű feltételek:

$$x_1: \qquad w_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} \qquad (2)$$

$$x_2: \qquad w_2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} \qquad (3)$$

$$\lambda: \qquad y = f(x_1, x_2) \qquad (4)$$

(2), (3), (4) révén meghatározzuk a feltételes tényezőkeresleti függvényeket:

$$x_1^* = x_1^*(w_1, w_2, y) \qquad (5)$$

$$x_2^* = x_2^*(w_1, w_2, y) \qquad (6)$$

(5), (6) révén meghatározzuk a költségfüggvényt:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y) \qquad (7)$$

17.3/2

$\lambda = MC = \dfrac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y}$. Bizonyítás

Differenciáljuk a költségfüggvényt y szerint!

$$\frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y} = w_1 \frac{\partial x_1^*(..y)}{\partial y} + w_2 \frac{\partial x_2^*(..y)}{\partial y} \qquad (8)$$

Helyettesítsük be a jobb oldalra (2), (3) elsőrendű feltételeket!

$$\begin{aligned}\frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial y} \\ &= \lambda \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial y} \right] \qquad (9)\end{aligned}$$

Mivel a zárójelben levő kifejezés nem más, mint:

$$\frac{\partial f(x_1^*(..y), x_2^*(..y))}{\partial y} = \frac{dy}{dy} = 1 \qquad (10)$$

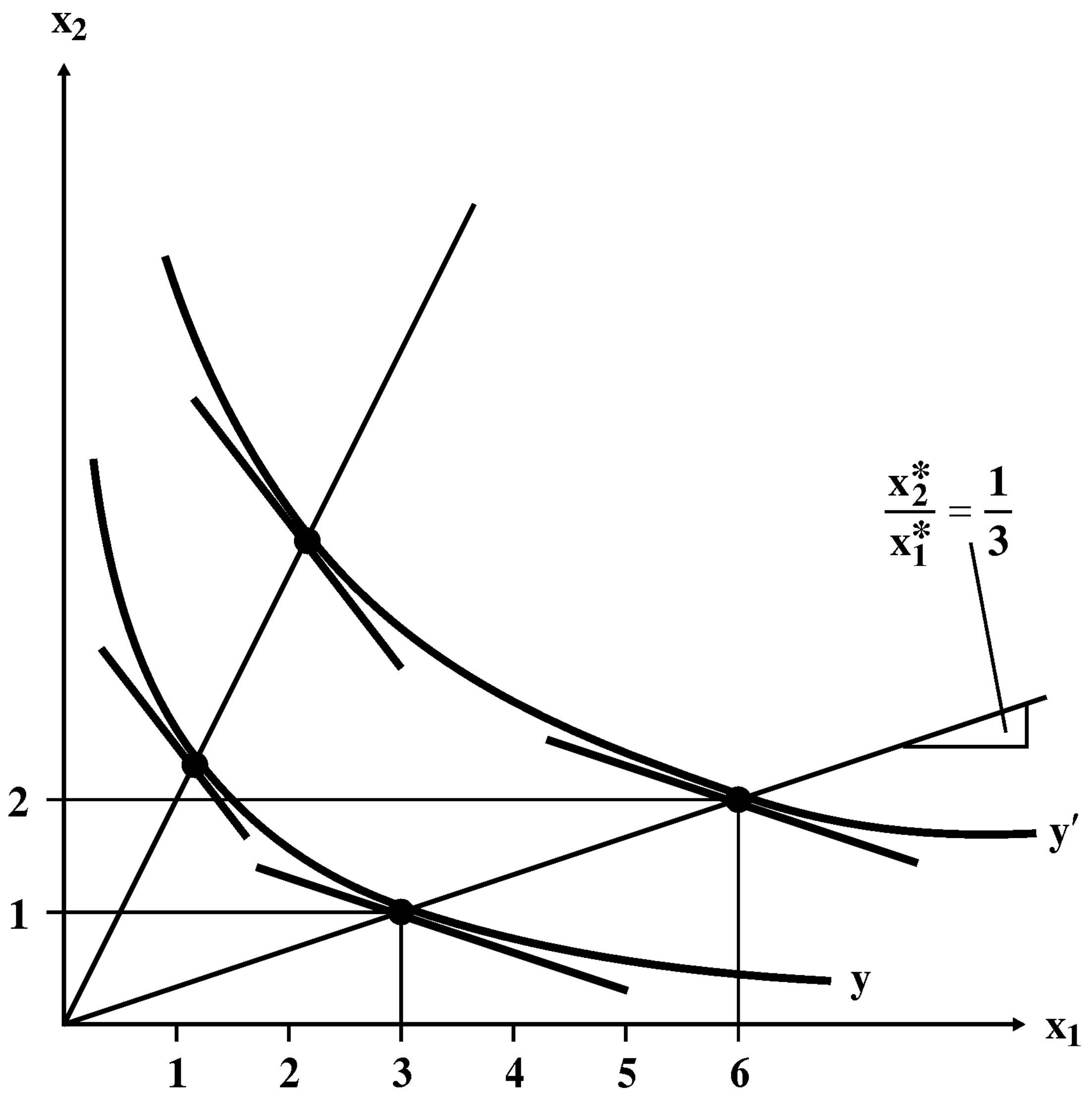
Így:

$$\frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y} = \lambda \qquad (11)$$

Vagyis:

$$\boxed{\lambda = MC} \qquad (11')$$

17.4
Hozadéki viszonyok homotetikus termelési függvények (sugarasan párhuzamos izokvantok) esetében (szemléltető példa)



$$y = f(tx_1^*, tx_2^*) = f(t3, t1)$$

Mérethozadék	t = 1	t = 2
növekvő	y = 10	y′ = 30
csökkenő	y = 10	y′ = 15
állandó	y = 10	y′ = 20

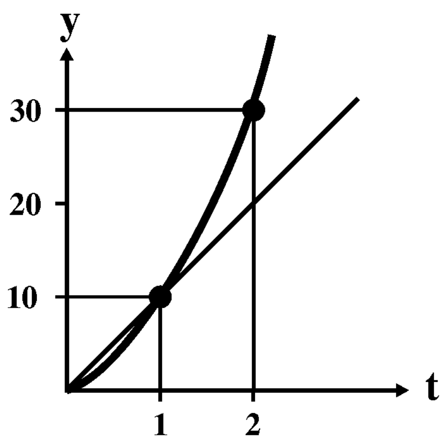
17.5
A termelési és költségfüggvény hozadéki viszonyainak dualitása
(a szemléltető példa folytatása)

Vállalatméret (t) állandó tényező-arány mellett	$t = 1$ $x_1^* = 3;\ x_2^* = 1$	$t = 2$ $x_1^* = 6;\ x_2^* = 2$
Output $y = f(tx_1^*, tx_2^*)$	Növekvő mérethozadék	
	$y = 10$	$y' = 30$
Költség $c = c(y \mid w = \tilde{w})$	$c(10)$ $= 3w_1 + w_2$	$c(30)$ $= 6w_1 + 2w_2$ $= 2 \cdot c(10)$
Output $y = f(tx_1^*, tx_2^*)$	Csökkenő mérethozadék	
	$y = 10$	$y' = 15$
Költség $c = c(y \mid w = \tilde{w})$	$c(10)$ $= 3w_1 + w_2$	$c(15)$ $= 6w_1 + 2w_2$ $= 2 \cdot c(10)$
Output $y = f(tx_1^*, tx_2^*)$	Állandó mérethozadék	
	$y = 10$	$y' = 20$
Költség $c = c(y \mid w = \tilde{w})$	$c(10)$ $= 3w_1 + w_2$	$c(20)$ $= 6w_1 + 2w_2$ $= 2 \cdot c(10)$

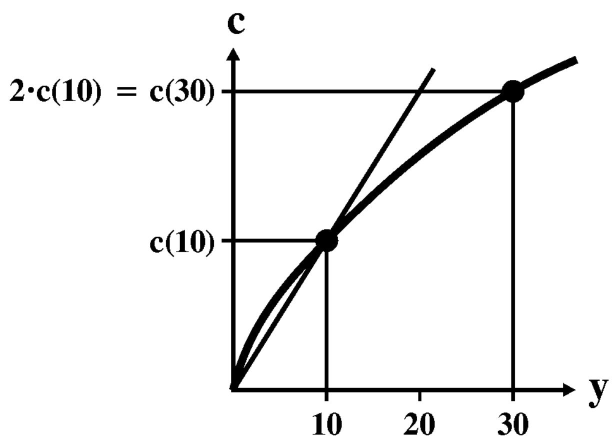
17.6
A termelési és költségfüggvény hozadéki viszonyainak dualitása

TERMELÉSI FÜGGVÉNY:
$y = f(tx_1^*, tx_2^*)$

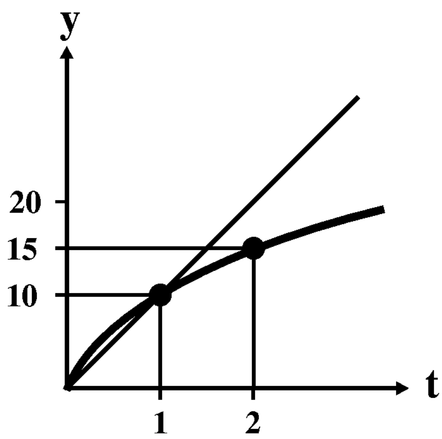
KÖLTSÉGFÜGGVÉNY:
$c = c(y) = c(y \mid w = \tilde{w})$



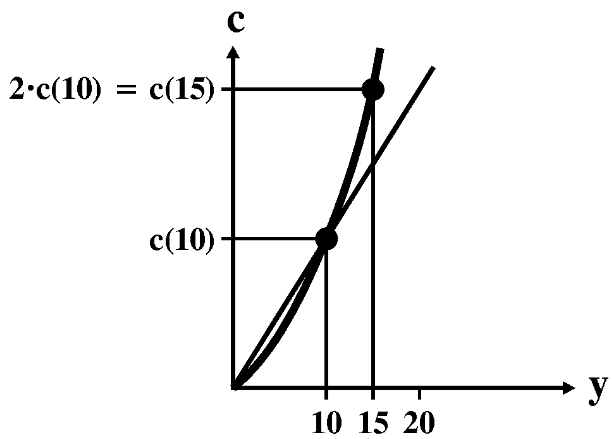
Növekvő mérethozadék



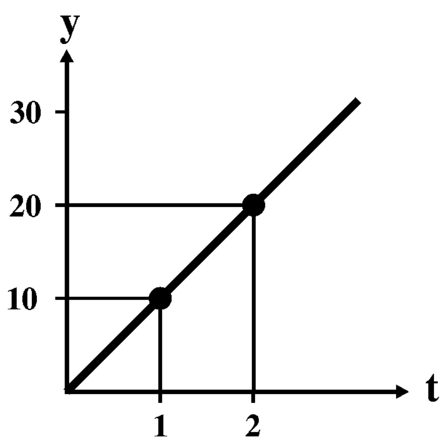
Csökkenő átlagköltség



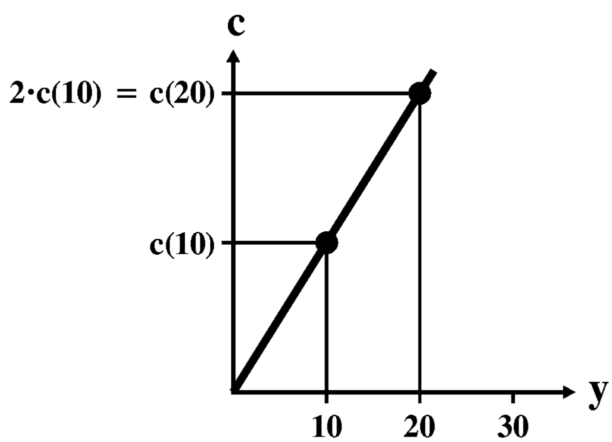
Csökkenő mérethozadék



Növekvő átlagköltség



Állandó mérethozadék

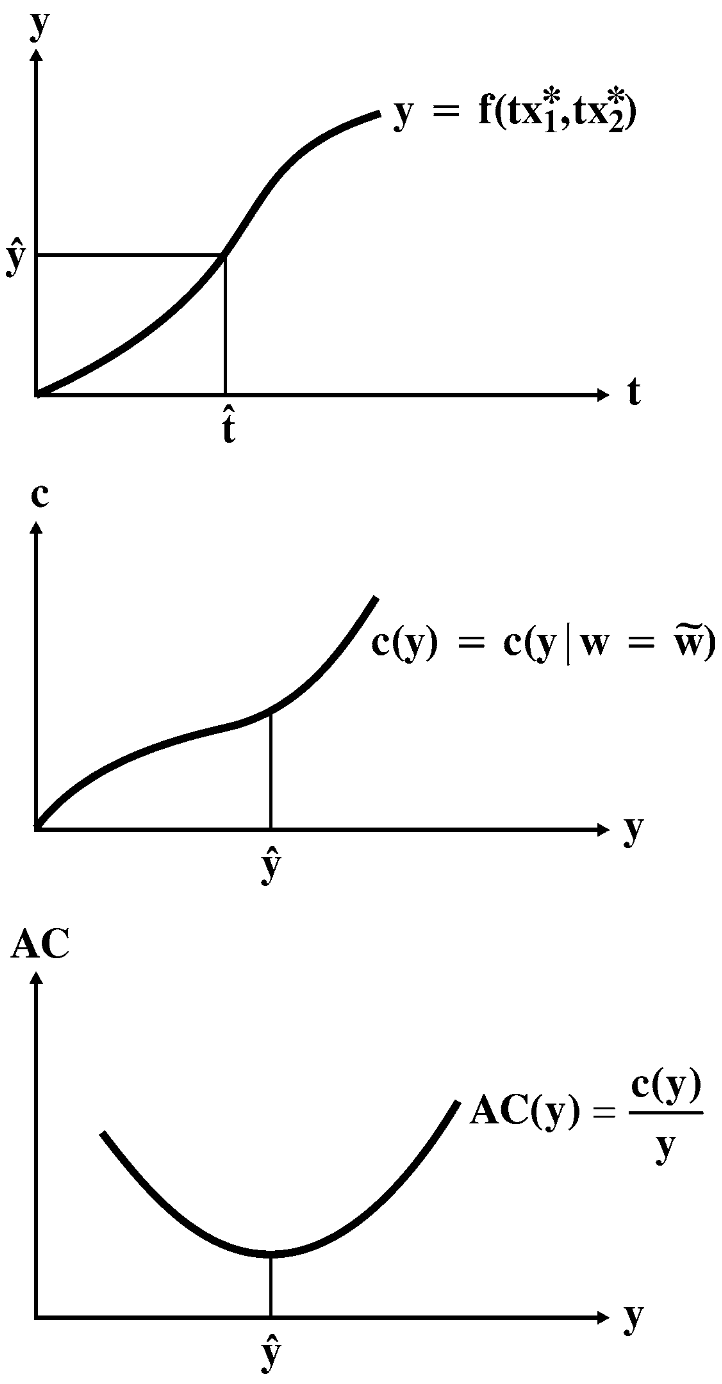


Állandó átlagköltség

17.7
Az átlagköltségfüggvény

$$\mathbf{AC(y) = \frac{c(y, w_1, w_2)}{y}}$$

17.8
A termelési és költségfüggvény hozadéki viszonyainak dualitása (a szemléltető példa kibővítése az átlagköltségfüggvénnyel)



17.9
Rövid táv – hosszú táv; állandó – változó tényezők és költségek: fogalmi térkép

Tényezők és költségek		Rövid távú	Hosszú távú
termelési függvény		$y = f(x_1,\tilde{x}_2)$	$y=f(x_1,x_2)$
tényező-fajták	állandó tényező	$x_2=\tilde{x}_2$	nincs
	változó tényező	x_1	x_1,x_2
költségfüggvény		$c = c(w_1,w_2,y,\tilde{x}_2)$ ha w_1,w_2 rögzített: $c_s = c_s(y)$	$c = c(w_1,w_2,y)$ ha w_1,w_2 rögzített: $c = c(y)$
költség-fajták	állandó költség	$F = w_2\tilde{x}_2$	nincs
	változó költség	$w_1x_1^*(w_1,w_2,y,\tilde{x}_2)$ ha w_1,w_2 rögzített: $c_v = c_v(y)$	$w_1x_1^*(w_1,w_2,y)$ $+\ w_2x_2^*(w_1,w_2,y)$ ha w_1,w_2 rögzített: $c = c(y)$
	össz-költség	$c_s(y) = c_v(y) + F$	$c(y)$