MIKRO-
ÖKONÓMIA
ELŐADÁSVÁZLATOK

16. előadás

PROFITMAXIMALIZÁLÁS, KÖLTSÉGMINIMALIZÁLÁS

Kertesi Gábor – Világi Balázs

Varian 19. és 20. fejezete erősen átdolgozva

16.1 Bevezető

– Az előző előadás során a vállalat technológiai döntési lehetőségeit vizsgáltuk. A mostani előadás tárgya a vállalat céljának meghatározása, illetve a vállalat döntési problémájának rekonstruálása lesz. Mint már az előző előadás bevezetőjében említettük, a vállalat célja profitjának maximalizálása. Ebben az előadásban a versenyzői piacon tevékenykedő vállalat profitmaximalizálási problémáját tanulmányozzuk. Lássuk mindenekelőtt a profit fogalmát.

16.2 A profit

– A profitot a bevételek és a költségek különbségeként definiáljuk. Feltesszük, hogy a vállalat kétféle inputot használ és egyféle terméket termel. Profitja ekkor:

16.1 fólia

– A profit fenti definíciója számos egyszerűsítést tartalmaz: 1. Feltételezzük, hogy a vállalat *egy terméket* állít elő, holott a valóságban az általános eset minden bizonnyal az, hogy több terméket termel. 2. *Egy periódust* tartalmazó modellel dolgozunk, holott a valóságban a vállalat minden bizonnyal úgy gazdálkodik, hogy nemcsak a jelenbeli bevételeit és költségeit veti egybe, hanem jövőbeli bevételekkel és költségekkel is számol. 3. A profit fenti definíciójában a bevétellel és költségekkel úgy számolunk, mint teljes *bizonyossággal* ismert mennyiségekkel, holott a valóságban ezeknek a változóknak a nagyságát a vállalat csak valószínűségi alapon ismeri. Mindezekkel a bonyodalmakkal (többtermékes, többperiódusos, sztochasztikus profitmaximalizálási problémákkal) haladó mikroökonómiai modellek foglalkoznak. Mi itt most beérjük a legegyszerűbb modell kifejtésével. Ennek révén is értékes új ismeretekhez juthatunk.

A. PROFITMAXIMALIZÁLÁS

16.3 A profitmaximalizálási feladat

– A vállalat profitmaximalizálási feladata egy feltételes optimalizálási feladat, melynek során a vállalat bevételeinek és költségeinek különbségét (a profitját) oly módon igyekszik maximalizálni, hogy közben figyelembe veszi a ráfordítások és a kibocsátás közti technológiai összefüggéseket, melyeket számára a termelési függvény testesíti meg. Két termelési tényező, és egyféle output esetében a probléma így fest:

16.2 fólia

– A profitmaximalizálási feladat megoldása során a vállalat szimultán módon dönt optimális tényezőfelhasználásáról és optimális outputjáról.

– Mielőtt általánosságban megvizsgálnánk a profitmaximalizálási problémát, vegyük szemügyre előbb azt az egyszerűbb feladatot, amikor a vállalat csak az egyik tényező mennyiségét képes szabadon megválasztani, és a *másik termelési tényező mennyisége rögzítve van*. Ezt az esetet **"rövid távú"** profitmaximalizálási problémaként is értelmezhetjük, hiszen rövid távon – mondjuk egy héten vagy hónapon belül – a vállalat minden ráfordításának mennyiségét nem képes változtatni. Nincs olyan vállalat, amely heti vagy havi rendszerességgel emelne vagy bontana épületeket, illetve hetente vagy havonta venne vagy adna el termelő berendezéseket. A vállalatok azonban még viszonylag rövid (heti-havi) időtávon belül is viszonylag rugalmasan képesek változtatni, hogy hány órán át működtessék meglevő gépeiket, mennyi nyersanyagot használjanak fel, és munkásaikat hány órát át dolgoztassák. Kellően hosszú időhorizontot – mondjuk 5-10 évet – alapul véve azonban, a vállalat bármely inputjának mennyiségét képes megváltoztatni.

– Azt a termelési tényezőt, amelynek a mennyisége a vállalat számára adott időtávon belül rögzített, **állandó tényezőnek** nevezzük. Azt a termelési tényezőt, amelynek a mennyiségét a vállalat adott időtávon belül szabadon megválaszthatja, **változó tényezőnek** nevezzük. Azt az időtávot, amelyen a vállalat minden termelési tényezőjének mennyiségét képes megváltoztatni, **"hosszú távnak"** nevezzük.

– A valóságban természetesen a lehetséges időtávoknak egész kontinuuma létezik attól függően, hogy egyes inputféleségek mennyiségét milyen időtávon belül képes egy vállalat szabadon megválasztani. Hogy a közgazdászok e kontinuum helyett gyakran csak ezt a két időtávot használják, azt a probléma egyszerűbb technikai kezelhetősége érdekében teszik.

16.4 A profitmaximalizálási feladat, ha az egyik termelési tényező mennyisége rögzített: "rövid táv"

1. Az optimumfeltétel levezetése és közgazdasági értelmezése

– Vizsgáljuk meg tehát a profitmaximalizálási problémát azon feltétel mellett, hogy az x_2 tényező $\tilde{x}_2$ szinten van rögzítve.

16.3 fólia

– A feladat elsőrendű feltétele az mondja ki: *valamely tényező határtermékének értéke meg kell hogy egyezzen a tényező árával*.

16.4 fólia

– Ugyanezt a feltételt grafikusan is levezethetjük. Tekintsük a 16.4. ábrát, amelyen a profitfüggvényt úgy ábrázoljuk, hogy az outputot (y-t) a változó termelési tényező (x_1) függvényében fejezzük ki, melynek következtében a profit értékének változásával egymással párhuzamos egyenesek – ún. egyenlőprofit-egyenesek (izoprofit-egyeneseket) sorozatát – kapjuk. Az egyenesek w_1 / p meredekségűek, és a függőleges tengelyt a $[(w_2\tilde{x}_2)/p] + \pi / p$ pontban metszik. A metszéspont nem más, mint az állandó költség és a profit összege.[1] Minthogy az állandó tényező költsége rögzített, az egyik izoprofit egyenesről a másikra lépve, az egyetlen valóban változó mennyiség a profit szintje: a magasabb függőleges tengelymetsze-tekhez egyre magasabb profitértékek tartoznak.

16.5 fólia

– A profitmaximalizálási probléma ábrázolásához be kell illesztenünk az ábrába a feladat másik elemét, a termelési függvényt is. A probléma megoldását a termelési függvénynek az a pontja képviseli, amelyikhez a legmagasabban fekvő izoprofit-egyenes tartozik. Ahogy megszoktuk, itt is érvényesül az érintőfeltétel: az optimumban a termelési függvény meredeksége megegyezik az izoprofit-egyenes meredekségével: $MP_1(x_1^*, \tilde{x}_2) = w_1 / p$. Ha ezt az egyenletet átrendezzük, akkor természetesen ugyanahhoz az optimumfeltételhez jutunk, amelyet az imént algebrai eszközökkel megkaptunk: *egy tényező határtermékének értéke meg kell hogy egyezzen a tényező árával*.

– Az előbb alkalmazott grafikus technika segítségével szemléletesen megmutatható az optimumfeltételnek és a mögötte meghúzódó magatartási szabálynak a közgazdasági értelme.

16.6 fólia

– Vegyük szemügyre az A és B pontot, melyekben nem teljesül az optimumban megkövetelt érintési feltétel. A pontban a tényező határtermékének értéke nagyobb, mint a tényező ára: $pMP_1' > w_1$. Érdemes tehát a tényezőfelhasználás növelésével a termelést bővíteni, hiszen a bevétel ezáltal nagyobb mértékben nő, mint a költség. A ráfordítások növelésével

[1] Jobban mondva: annak ($1/p$)-szerese.

egészen addig növelhető a profit ($\pi \to \pi^*$), amíg a tényező határtermékének értéke a tényező árának szintjére nem csökken[2]. *B* pontban fordított a helyzet: ott a tényező határtermékének értéke alacsonyabb, mint a tényező ára: $pMP_1'' < w_1$. Itt a tényezőfelhasználást és a termelést vissza kell fogni, hiszen a tényezőfelhasználás csökkentésével nagyobb költségmegtakarítás érhető el, mint amekkora bevételcsökkenést kell elszenvedni a termelés volumenének visszafogása miatt. A ráfordítások volumenének visszafogásával egészen addig növelhető a profit ($\pi \to \pi^*$), amíg a tényező határtermékének értéke a tényező árának szintjére nem emelkedik. [3] Egyedül a *C* pontban kapunk stabil megoldást, ott, ahol a *tényező határtermékének értéke épp megegyezik a tényező árával.*

2. A maximum elégséges feltétele: a termelési függvény konkavitásának jelentősége

16.7 fólia

– Könnyen belátható, hogy ha a termelési függvény *konkáv*, akkor – belső megoldás esetén[4] – a profitmaximalizálási feladat *másodrendű feltétele is teljesül*.

16.8 fólia

– Nem konkáv termelési függvény esetén azonban gondok vannak. Ha a termelési függvény *konvex*, akkor a profitmaximalizálási feladatnak *nincs véges megoldása*.

16.9 fólia

– *Lineáris* termelési függvénynél (általános esetben) a profitmaximalizálási feladathoz *vagy zérus vagy végtelen értékű* megoldás (tényezőfelhasználás, output, illetve profit) tartozik. Ab-ban a kivételes esetben, ha a lineáris termelési függvény és az izoprofit-egyenesek meredeksége épp megegyezik, az optimum meghatározatlan: minden inputfelhasználás és outputszint egyaránt optimális.

3. Outputkínálat és tényezőkereslet: komparatív statika

– Térjünk most vissza a (rövid távú) profitmaximalizálási feladat algebrai megoldásához!

16.10 fólia

– Ha az elsőrendű feltételből kifejezzük az optimális tényezőfelhasználás (x_1^*) változóját, megkapjuk a vállalat **tényezőkeresleti függvényét**: $x_1^* = x_1^*(w_1, p \mid x_2 = \tilde{x}_2)$; rögzített p esetén a tényezőkeresleti görbét: $x_1^* = x_1^*(w_1)$. Ha pedig az így kapott tényezőkeresleti függvényt visszahelyettesítjük a termelési függvénybe, megkapjuk a vállalat által termelt

[2] Ha a termelési függvény x_1 argumentumában konkáv, ez bizonyosan be is következik.
[3] Ha a termelési függvény x_1 argumentumában konkáv, ez bizonyosan be is következik.
[4] Természetesen konkáv esetben is lehetséges sarokmegoldás: ilyenkor az optimumban az elsőrendű feltétel sem teljesül. Hozzunk erre az esetre egy grafikus példát!

jószág **kínálati függvényét**: $y = y(p, w_1 \mid x_2 = \tilde{x}_2)$; rögzített w_1 esetén a vállalt kínálati görbéjét: $y = y(p)$. A profitmaximalizálási feladat megoldásával a vállalat szimultán módon meghatározza optimális tényezőkeresletét és outputkínálatát.

– Mit mondhatunk az így meghatározott kínálati és tényezőkeresleti görbe alakjáról? Hogyan reagál a outputkínálat a termék árának változására, illetve a tényezőkereslet a tényező árának változására? Vegyük előbb a kínálat problémáját. Tekintsük a 16.11. ábrát.

16.11 fólia

– Mint az izoprofit-egyenesek egyenletéből (lásd 16.4. fólia) megállapíthatjuk: ha az output ára csökken, az izoprofit egyenes meredekebb lejtésű lesz. Ez esetben x_1 tényező optimális felhasználása csökken, miközben az x_2 tényező felhasználása továbbra is a rövid távon rögzített szintjén marad. A vállalatnak ilyenkor csökkentenie kell az outputot. Vagyis: az output árának csökkenése csökkenti a termék kínálatát. Tehát: **a kínálati görbe pozitív lejtésű**.

16.12 fólia

– Mi a helyzet a tényezőkereslettel? Végezzük el a hasonló gondolatkísérletet: változtassuk most az egyenlőprofit-egyenesek lejtését a tényezőár (w_1) változtatása által! Azt tapasztaljuk, hogy ha a tényezőár nő, akkor az izoprofit-egyenes meredekebb lesz, és az érintési pont balra tolódik. Ez egyszerűen azt jelenti, hogy amennyiben a tényező ára nő, az iránta megnyilvánuló keresletnek csökkennie kell. Tehát: **a tényezőkeresleti görbe negatív lejtésű**. Ezt az eredményt egyszerű algebrai eszközökkel is ellenőrizhetjük.

16.13 fólia

– Emlékezzünk rá, hogyan határoztuk meg a tényezőkeresleti függvényt! A profitmaximalizálási feladat elsőrendű feltételéből fejeztük ki. Térjünk most vissza az elsőrendű feltételhez, és végezzük el rajta algebrai eszközökkel az iménti komparatív statikai elemzést. Mivel x_2 tényező értéke rögzített, a feladat egyszerűen – lineáris algebra alkalmazása nélkül – megoldható[5].

– Differenciáljuk teljesen az elsőrendű feltételt x_1^* és w_1 szerint (vagyis változtassuk szimultán módon a tényezőfelhasználást és a tényezőárat). Arra vagyunk kiváncsiak, hogy a tényezőár változása milyen előjelű változást idéz elő az optimális tényezőfelhasználásban. Ha átrendezzük a kapott egyenletet (3), akkor választ kapunk a kérdésre. Amennyiben a termelési függvény x_1 argumentumában *konkáv* – amit egyébként a maximumfeladat másodrendű feltételének teljesülése érdekében meg is követelünk –, akkor a tényező árának változása és az optimális tényezőkereslet alakulása között **inverz kapcsolatot** kapunk.

16.14 fólia

[5] Valódi kéttényezős esetben két elsőrendű feltételünk van. Ilyenkor a tényezőkeresleti függvények meghatározása is egy egyenletrendszer megoldását feltételezi. Ezt az esetet hamarosan látni fogjuk. A fent vázolt komparatív statikai elemzés algebrai technikája ez esetben lineáris algebrai eszközök alkalmazását igényli.

– Ez egyébként jól látszik akkor is, ha az elsőrendű feltételt mint inverz tényezőkeresleti görbét fogjuk fel, és az (x_1, w_1) változók terében ábrázoljuk. A görbe nyilvánvalóan lefelé lejt, ha az x_1 tényező határtermékgörbéje negatív lejtésű. Ez csak akkor teljesül, ha a termelési függvény x_1 argumentumában *konkáv.*

16.5 A profitmaximalizálási feladat, ha az egyik termelési tényező mennyisége sem rögzített: "hosszú táv"

1. Az optimumfeltételek levezetése és közgazdasági értelmezése

– Hosszú távon a vállalat bármely ráfordításának szintjét szabadon megválaszthatja. A hosszú távú profitmaximalizálási feladat tehát az alábbi formában írható fel és oldható meg:

16.15 /1 fólia

– Mint látható, az optimális döntési feltétel is lényegében ugyanaz, mint az egyváltozós ("rövid távú") esetben, de most e feltételt mindegyik tényezőre alkalmaznunk kell. Ha a vállalat optimálisan választotta meg a két tényező mennyiségét, akkor mindkét tényező esetében meg kell hogy egyezzen egymással a határtermék értéke és a tényező ára. Optimális helyzetben a vállalati profit nem növelhető egyik tényező szintjének változtatásával sem. Gyakorlásképpen fogalmazzuk meg itt is azt a közgazdasági érvelést, amelyet az egyváltozós eset elsőrendű feltételének értelmezése kapcsán elmondtunk!

16.15/2 fólia

– Az elsőrendű feltételek[6] segítségével meghatározhatjuk a tényezőkeresleti függvényeket. Ha pedig az így kapott tényező-keresleti függvényeket behelyettesítjük a termelési függvénybe, megkapjuk a vállalat kínálati függvényét.

2. Profitmaximalizálás és mérethozadék

– Ha egy versenyzői piacon tevékenykedő vállalat valamennyi tényezőjének felhasználását szabadon megválaszthatja, akkor a *pozitív és korlátos maximumprofit csak csökkenő mérethozadékú termelési függvénnyel egyeztethető össze*. Vagyis, ha biztosítani akarjuk, hogy a versenyzői piacon működő vállalatunk pozitív és korlátos profitot realizáljon, akkor biztosítanunk kell azt, hogy a vállalat termelési függvénye bizonyos vállalati mérettartományban csökkenő mérethozadékú legyen. Ezt a fontos állítást közös erővel igazolni fogjuk.

– Vegyük először azt az esetet, ha a vállalati termelési függvény a teljes kibocsátási tartományban (minden vállalati méret mellett) **állandó mérethozadékú**. Ez esetben

[6] A másodrendű feltételek kétváltozós esetben bonyolultabbak, bár lényegében az egyváltozós esettel analógak. A kétváltozós esetben is a termelési függvény konkavitása az, ami – a sarokmegoldásokat leszámítva – bizosítja a maximum elégséges feltételét. A kétváltozós függvény konkavitása az optimális megoldás pontjában értelmezett Hesse-mátrix tulajdonságainak tisztázását követeli meg. Lásd: Sydsaeter-Hammond: Matematika közgazdászoknak, Aula, Budapest, 1998. 17.9. fejezet. Ezekről a feltételekről elsőéves korukban a második félévi matekban már hallhattak.

igazolható, hogy egy ilyen vállalat hosszú távú profitja csakis zérus lehet. Indirekt bizonyítást alkalmazunk.

16.16 fólia

– Gondolkozzunk csak el, mi az oka ennek! Mit jelent az, hogy egy vállalat termelési függvénye – bármely kibocsátási szint mellett – állandó mérethozadékú? Azt jelenti, hogy – adott tényezőarányokat feltételezve – ráfordításainak növelésével arányos kibocsátásnövekedést képes elérni. Ha emellett pozitív profitot is képes lenne elérni, akkor ez azt jelentené, hogy méretét korlátlanul érdemes lenne növelnie. Ha viszont így áll a helyzet, akkor ugyanezt a technológiát alkalmazva, bármely más vállalat is megtehetné ezt. Két eset lehetséges: (a) vagy más vállalatok is megteszik ezt, és ekkor a kínálat növekedése lenyomja a termék árát, a zérus profitszint féle közelítve az iparág profitját, vagy (b) maga a szóban forgó vállalat ismeri fel ezt a veszélyt, és a kínálat növelésével párhuzamosan csökkenti oly mértékben az árat, hogy az zérus profitszintet eredményezzen, amivel megakadályozhatja azt, hogy más vállalatok betörjenek az adott termék piacára.

– A fenti egyszerű algebrai gyakorlatot megismételhetjük *növekvő*, illetve *csökkenő* mérethozadék esetére is. Könnyen igazolható, hogy **növekvő mérethozadék** esetén a profitmaximalizálási feladatnak nincs korlátos megoldása, **csökkenő mérethozadék** esetében viszont van. Otthoni gyakorlásképpen, a 16.16. fólián látható bizonyítással analóg módon igazoljuk ezt!

B. KÖLTSÉGMINIMALIZÁLÁS

16.6 Kerülőút a profitmaximalizálási feladat megoldására

– A profitmaximalizálási feladat megoldására közvetettebb utat is válaszhatunk. Ahelyett, hogy közvetlen módon megoldanánk a 16.15/1. fólián általános formában felírt profitmaximalizálási feladatot, a feladatot két lépésre bontva, közvetett eljárással oldjuk meg:

16.17 fólia

– Az indirekt eljárás követése számos előnnyel jár, melyekre a kifejtés során folyamatosan rámutatunk.

16.7 A közvetett eljárás 1. lépése: a költségminimalizálási feladat

– A költségminimalizálási feladat algebrailag így fest:

16.18 fólia

– A szemléletesség érdekében grafikusan is ábrázoljuk a problémát.

16.19 fólia

– Ugyanabba az ábrába rajzoljuk be a költségeket és a vállalati technológiai korlátokat. A technológiai lehetőségeket – ahogy megszoktuk – az egyenlőtermék- (vagy izokvant-) görbék reprezentálják. Egy izokvant-görbe azokat az inputkombinációkat tartalmazza, amelyekkel egy adott y outputszint megtermelhető. A költségminimalizálási feladathoz egy y outputszintet biztosítani képes izokvantot rögzítünk. Tegyük fel továbbá, hogy egy adott C költségszintnek megfelelő összes ráfordításkombinációt is ábrázolni szeretnénk. Ezt könnyen megtehetjük, ha az összköltségeket meghatározó egyenletet átrendezzük, és kifejezzük belőle az egyik termelési tényező mennyiségét a másik függvényében. Ezzel az eljárással egy $-w_1/w_2$ meredekségű és C/w_2 függőleges tengelymetszetű egyeneshez jutunk. C költségszint változtatásával az ún. **egyenlőköltség-egyenesek** (vagy izocost-egyenesek) sorozatát kapjuk meg. Az egyenlőköltség-egyenesek mindegyik pontja ugyanazt a C költségszintet fejezi ki. A költség a magasabban fekvő egyeneseken nagyobb.

– Költségminimalizálási feladatunkat tehát a következőképpen fogalmazhatjuk újra: Keressük az izokvant-görbének azt a pontját, amelyik a legalacsonyabban fekvő egyenlőköltség-egyeneshez tartozik. Egy ilyen pontot látunk a 16.19. ábrán. Az optimális tényezőfelhasználás pontjában, ahol adott y outputot a lehető legalacsonyabb költséggel állítunk elő, egy érintési feltétel teljesül: *az izokvant meredeksége (a technikai helyettesítés aránya) és az egyenlőtermék-egyenes meredeksége (a tényezőárak aránya) megegyezik.*[7]

[7] Ha sarokmegoldásunk van, ahol a két tényező közül az egyiket nem használjuk fel, akkor az érintési feltétel nem áll fenn. Hasonlóképpen, ha a termelési függvényben törések vannak (vagyis az izokvantnak töréspontja

– A költségminimalizálási problémát algebrailag (Lagrange-módszerrel) az alábbi módon oldjuk meg:

16.20 fólia

– Természetesen ezen a módon is az előbbi érintési feltételhez jutunk el: lásd a (7)-es formulát. A (7)-es formulát egy másik alakra (7') is hozhatjuk: az optimumban a határtermékek és tényezőárak hányadosainak minden tényező esetében meg kell egyezniük. Értelmezzük közgazdaságilag a kapott eredményt!

– Vegyük észre először, hogy egy tényező határterméke nem más, mint az outputnak az a pótlólagos mennyisége, amit az adott tényező pótlólagos egységének felhasználásával nyerhetünk; a tényező ára pedig nem más, mint e pótlólagos tényezőfelhasználás költsége. A határtermék/tényezőár hányados így azt fejezi ki, mekkora outputnövekedést remélhetünk attól, ha költségeinket egy pótlólagos dollárral növelve, egy adott tényezőből többet használunk fel. A határtermék/tényezőár hányados egyenlőségét kimondó optimumfeltétel így azt jelenti: ha költségeinket minimalizáltuk, akkor egy pótlólagosan ráfordított dollártól ugyanakkora outputnövekedést remélhetünk, akár az egyik, akár a másik tényező felhasználását növeljük meg általa. Nem érdemes tehát a költségminimumnak megfelelő tényezőfelhasználás pontjából elmozdulnunk.

– **Házi feladat**: gyakorlásképpen folytassunk le egy gondolatkísérletet. Képzeljünk el, és grafikusan ábrázoljunk egy olyan esetet, amikor egy olyan pontban vagyunk, ahol az egyenlőköltség-egyenes nem érinti, hanem metszi az előre rögzített izokvantot. A határtermék/tényezőár hányadosok egyenlősége ilyenkor nem teljesül. Miért? Hogyan értelmezzük ezt az esetet? Milyen gyakorlatias következtetést vonhatunk le belőle?

– A költségminimalizálási feladat megoldásaként tehát megkapjuk az optimális tényezőfelhasználást. A tényezők optimális felhasználásának értékét a feladat elsőrendű feltételeiből kaphatjuk meg.

16.21 fólia

– Vegyük észre, hogy a kapott megoldások (x_1^* és x_2^*) értéke függ a tényezők árától (w_1-től és w_2-től) és természetesen függ a vállalat termelési szintjétől (y-tól), azaz maguk is függvények: $x_i^* = x_i^*(w_1, w_2, y)$, $i = 1,2$. Ezek a **feltételes tényezőkeresleti függvények**. Az adott tényező iránti vállalati keresletet mérik a tényezők árainak függvényében, azon *feltétel* mellett, hogy a válla-lat a kibocsátás egy meghatározott szintjén (*y szinten*) termel.

– Gondosan ügyeljünk rá, hogy ne keverjük össze egymással az imént meghatározott feltételes tényezőkeresleti függvényeket az profitmaximalizálási feladat közvetlen megoldásaként kapott **tényezőkeresleti függvényekkel**. Lásd a 16.15/2. fólia! Ez utóbbi esetben *nem rögzítettük előre a vállalat outputját*. A tényezőkeresleti függvény az optimális tényezőfelhasználást a tényezőárak és az output árának függvényében adja meg. Vagyis: $x_i^* = x_i^*(w_1, w_2, p)$, $i = 1,2$.

---

van), akkor az érintési feltétel nem értelmezhető (az izokvant nem differenciálható a töréspontban). Ilyen jellegű problémákról már sok szó esett a fogyasztói döntés optimumfeltételének taglalásakor.

– A feltételes tényezőkeresleteket általában nem tudjuk közvetlenül megfigyelni. Ezek hipotetikus konstrukciók. Arra adnak választ, hogy mennyit használna fel a vállalat az egyes tényezőkből, ha egy adott kibocsátási szintet a lehető legolcsóbban akar megvalósítani.[8] A feltételes tényezőkeresletek azonban mégis hasznos eszköznek bizonyulnak, ha a költségszempontból hatékony termelési eljárás meghatározását (a közvetett eljárás **1. lépését**) szeretnénk elválasz-tani az optimális kibocsátási szint meghatározásától (a közvetett eljárás **2. lépésétől**).

16.8 A költségfüggvény fogalmának bevezetése

– Az előző pontban felállított költségminimalizálási feladat megoldásaként meghatároztuk a vállalat feltételes tényezőkeresleti függvényeit. Ha most ezeket a megoldásokat visszahelyettesítjük a a költségminimalizálási feladat célfüggvényébe, akkor egy igen fontos függvényt határoztunk meg, amelyet **költségfüggvénynek** nevezünk.

16.22 fólia

– A $c(w_1, w_2, y)$ költségfüggvény – definíció szerint – w_1 és w_2 tényezőárak mellett az y output *minimális* költségét adja meg.[9] A költségfüggvény a termeléselmélet (és a kínálati elmélet) *kulcsfogalma.* A költségfüggvény diszkutálásával fogunk továbblépni két hét múlva a vállalati kínálati függvény meghatározása felé.

16.9 A közvetett eljárás 2. lépése: profitmaximalizálás a költségfüggvény felhasználásával

– A költségminimalizálási feladat megoldását megtestesítő költségfüggvény felhasználásával újrafogalmazhatjuk az eredeti profitmaximalizálási feladatot.

16.23 fólia

– A feladat elsőrendű feltételéből meghatározhatjuk a versenyzői piacon tevékenykedő profitmaximalizáló vállalat kínálati függvényét.

– A jövő heti előadáson szisztematikusan összevetjük egymással a kétfajta – a közvetlen és közvetett (kétlépéses) – eljárás alkalmazásával kapott eredményeinket. Bemutatjuk, hogy a kétfajta eljárás azonos eredményekre vezet.

[8] A feltételes tényezőkeresleti függvény analóg a fogyasztási elméletben megismert hicksi vagy kompenzált keresleti függvénnyel. Emlékeztetőként elmondjuk: a hicksi keresleti függvény esetében a fogyasztó keresletét azon kísérleti helyzet mellett tanulmányozzuk, hogy a fogyasztót nem engedjük elmozdulni egy előre meghatározott hasznossági szintről. A keresett mennyiség így a fogyasztott javak árai és az előre meghatározott hasznossági szint függvénye lesz.

[9] A költségfüggvény a a fogyasztási elméletben megismert kiadási függvény termeléselméleti megfelelője. Emlékeztetőként elmondjuk: a kiadási függvény egy rögzített hasznossági szint eléréséhez minimálisan szükséges pénzkiadás mértékét adja meg a fogyasztott javak árai és az elérni kívánt hasznossági szint függvényében.

16.10 A tényezők iránti kereslet alakulása a tényezőárak változásának függvényében

– A költségminimalizálási probléma modelljének keretében megmutatható az is, hogyan változik a tényezők iránti kereslet, ha a relatív tényezőárak megváltoznak. (Célszerű lesz, ha itt egy vállalat reakciói helyett egy sok vállalatból álló iparág viselkedését vizsgáljuk.)

16.24 fólia

– Induljunk ki a költségminimalizálási feladat megoldását megtestesítő *A* pontból. Mi történik akkor, ha az egyik termelési tényező (x_1) ára megnő: $w_1' > w_1$? Ha a vállalatok a termelés volumenén nem változtatnak, akkor a *költségeik emelkednek*, és a relatíve olcsóbbá vált x_2 tényezőből többet, a relatíve megdrágult x_1 tényezőből kevesebbet fognak felhasználni.[10] A két tényező között a vállalatok helyettesítenek: $A \to B$. Ezt a hatást **helyettesítési hatásnak** nevezzük, és mértékét az ábrán HH_1 és a HH_2 szimbólumokkal jelöltük.

– Az a körülmény, hogy *y* volumen termelését csak magasabb költségek mellett képesek a vállalatok megoldani, *általában*[11] azzal jár, hogy az output ára megemelkedik, és a kínálati görbe fölfelé tolódik.[12] Ennek következtében a piaci egyensúlyban csak kisebb termékmennyiség cserél gazdát. Ehhez az új egyensúlyi mennyiséghez lesznek kénytelenek a vállalatok igazítani a termelésüket. Hogy ennek következtében mekkora lesz a termelés visszaesése, az a termékkeresleti görbe rugalmasságától függ. Mint a 16.25. ábra alapján látszik: minél rugalmasabb a kereslet, annál nagyobb lesz az output visszaesése. Ezt a hatást **outputhatásnak** nevezzük ($B \to C$), és mértékét az ábrán OH_1 és a OH_2 szimbólumokkal jelöltük. Az output visszaesése egyaránt érezteti hatását *mindkét tényező keresletében*. Az outputszint csökkenése következtében az új arányarányának megfelelő mértékben visszaesik mindkét tényező kereslete.

16.25 fólia

– A két hatás additív. Egy tényező keresletének visszaesése a tényező **saját** árának emelkedése következtében két komponensből tevődik össze, helyettesítési hatásból és outputhatásból: $TH_1 = HH_1 + OH_1$. A két hatás iránya, sajátár-hatás esetén, megegyezik. Az óra korábbi részében bevezetett **tényezőkeresleti függvény**, illetve **feltételes tényezőkeresleti függvény** pontosan ezeket a reakciókat méri. A feltételes tényező-keresleti függvény segítségével tehetjük mérhetővé a rögzített outputszint melletti keresletvisszaesés mértékét, ha a tényező saját ára megnő (így mérhetjük meg a HH_1 helyettesítési hatást), a tényezőkeresleti függvény segítségével mérhetjük meg a tényező iránti kereslet teljes visszaesésének mértékét, ha a tényező saját ára megváltozik (ily módon tehetjük mérhetővé a TH_1 teljes hatást).

---

[10] Hogyan lehetne grafikus eszközökkel igazolni, hogy ez esetben a vállalatok költségei emelkedni fognak?

[11] Ez abban az esetben következik be, ha a költségek abszolút nagyságának növekedése együtt jár a határköltség növekedésével. (Korábban láttuk ugyanis, hogy a vállalatok kínálati döntéseik meghozatalakor a határköltséget teszik egyenlővé a termék árával, nem pedig a költségek abszolút nagyságát.) Ez a feltétel akkor teljesül, ha az inputok "normál jószágként" viselkednek: vagyis ha magasabb kibocsátás mellett az optimális inputfelhasználás is nagyobb. Ez általában így van (homotetikus termelési függvények esetében pedig mindig így van).

[12] Azért tolódik fölfelé, mert e magasabb költségszinten a vállalatok bármely termelési volument csak magasabb egységáron képesek forgalomba hozni.

16. előadás

PROFITMAXIMALIZÁLÁS, KÖLTSÉGMINIMALIZÁLÁS

MELLÉKLET

Kertesi Gábor – Világi Balázs

16.1

A vállalat profitja

π : profit

y : kibocsátás (output)

p : az output ára

x_1, x_2 : ráfordítások (inputok)

w_1, w_2 : a ráfordítások árai

Profit = Bevétel – Költség

$$\pi = py - \sum_{i=1}^{2} w_i x_i$$

Egyszerűsítések:

1. **A vállalat egy terméket állít elő**
2. **Egy periódust feltételezünk**
3. **Nincs bizonytalanság**

16.2
A profitmaximalizálási feladat

<u>A vállalat célja</u>: a profit maximalizálása

$$\pi = py - \sum_{i=1}^{2} w_i x_i \rightarrow \max!$$

<u>Korlátozó feltétel</u>: technológiai korlát, melyet a termelési függvény testesít meg:

$$y = f(x_1, x_2)$$

<u>A profitmaximalizálási feladat</u>:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1, x_2} & \pi = py - (w_1 x_1 + w_2 x_2) \\ \text{kf}: & y = f(x_1, x_2) \end{array}}$$

16.3
Profitmaximalizálás, ha az egyik termelési tényező mennyisége rögzített: rövid táv

x_2 mennyisége rögzített:

$$y \quad f \;\; x_1, \tilde{x}_2 \qquad f \;\; x_1 \big| \; x_2 \quad \tilde{x}_2$$

Profitmaximalizálási feladat:

$$\boxed{\begin{aligned} \max_{x_1} \;\; & py - \left(w_1 x_1 + w_2 \tilde{x}_2\right) \\ kf: \;\; & \quad y = f\left(x_1, \tilde{x}_2\right) \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

Helyettesítsük be a korlátot a célfüggvénybe:

$$\max_{x_1} \;\; p\, f\left(x_1, \tilde{x}_2\right) - w_1 x_1 - w_2 \tilde{x}_2 \qquad (3)$$

Elsőrendű feltétel:

$$p \frac{\partial f\left(x_1, \tilde{x}_2\right)}{\partial x_1} = w_1 \qquad (4)$$

Másképpen:

$$p\, MP_1\left(x_1, \tilde{x}_2\right) = w_1 \qquad (4')$$

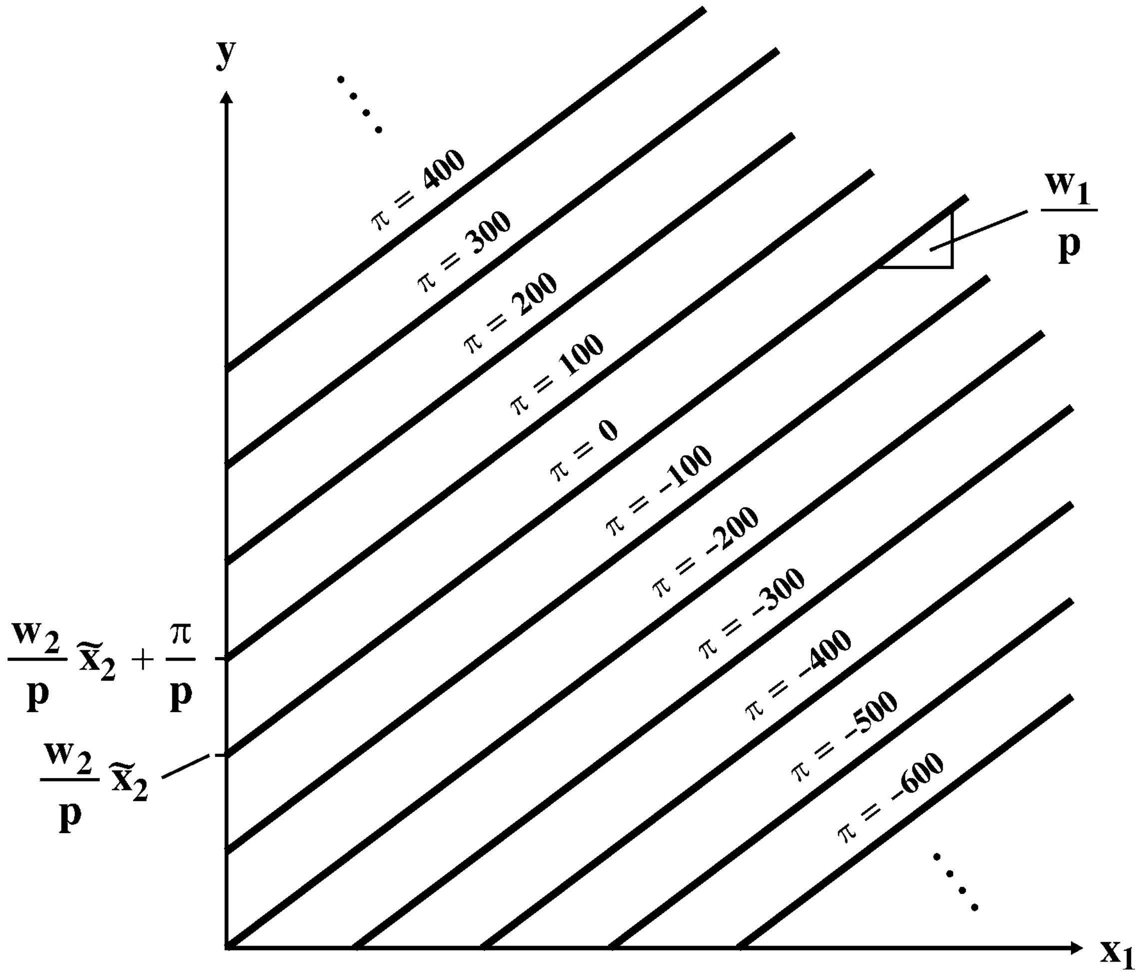
16.4
Egyenlőprofit- (izoprofit) egyenesek

$$\pi = py - w_1x_1 - w_2\tilde{x}_2$$

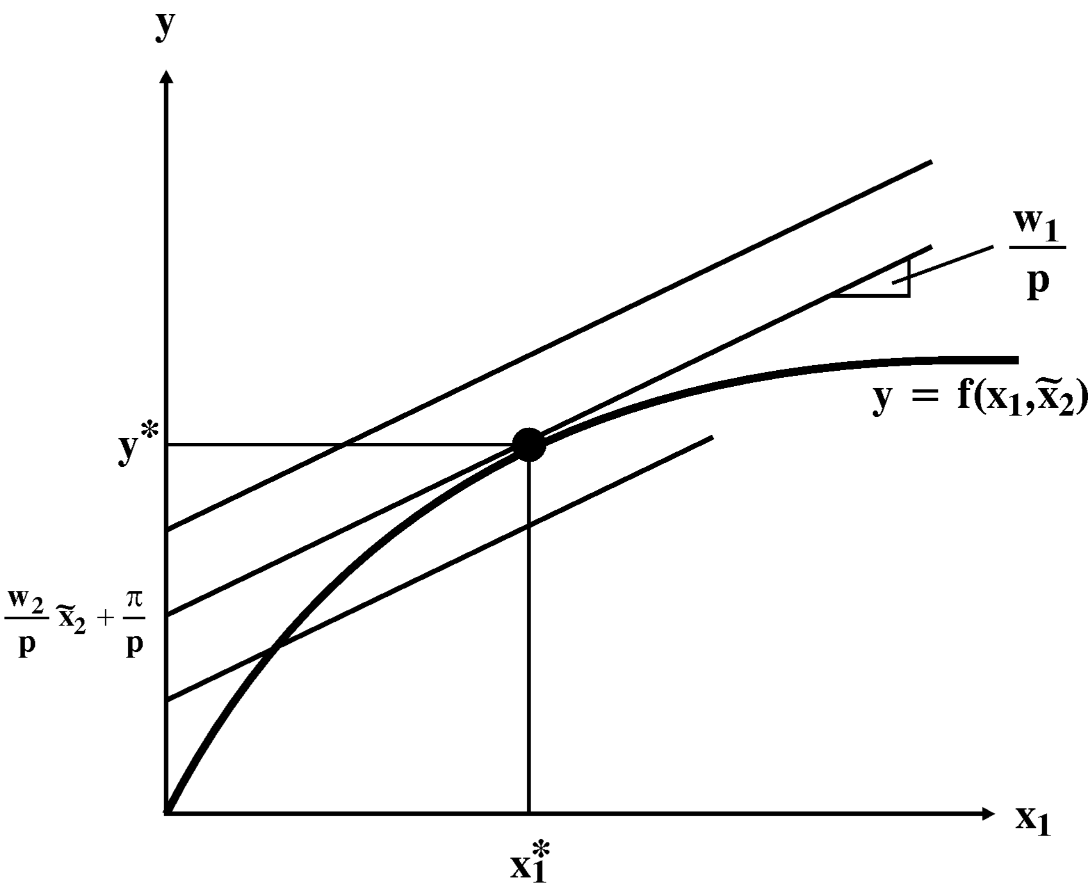
Rendezzük át a profitfüggvényt az alábbi módon:

$$y = \frac{\pi}{p} + \frac{w_2}{p}\tilde{x}_2 + \frac{w_1}{p}x_1,$$

és ábrázoljuk az (x_1, y) koordinátarendszerben!



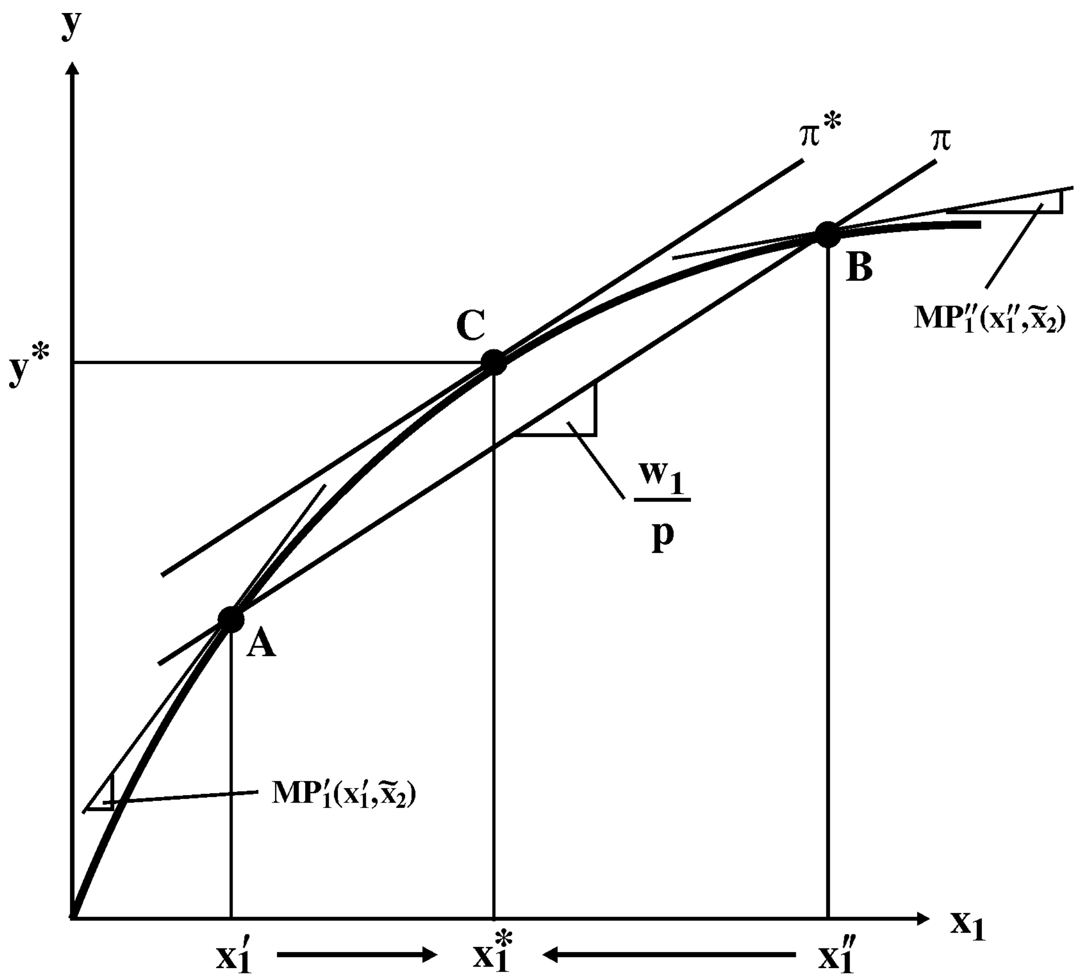
16.5
Profitmaximalizálás, ha az egyik tényező mennyisége rögzített: rövid táv (grafikus megoldás)



Érintőfeltétel: $$\frac{\partial f(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1} = \frac{w_1}{p}$$

$$pMP_1(x_1^*, \tilde{x}_2) = w_1$$

16.6
A rövid távú profitmaximalizálás optimumfeltételének közgazdasági értelmezése

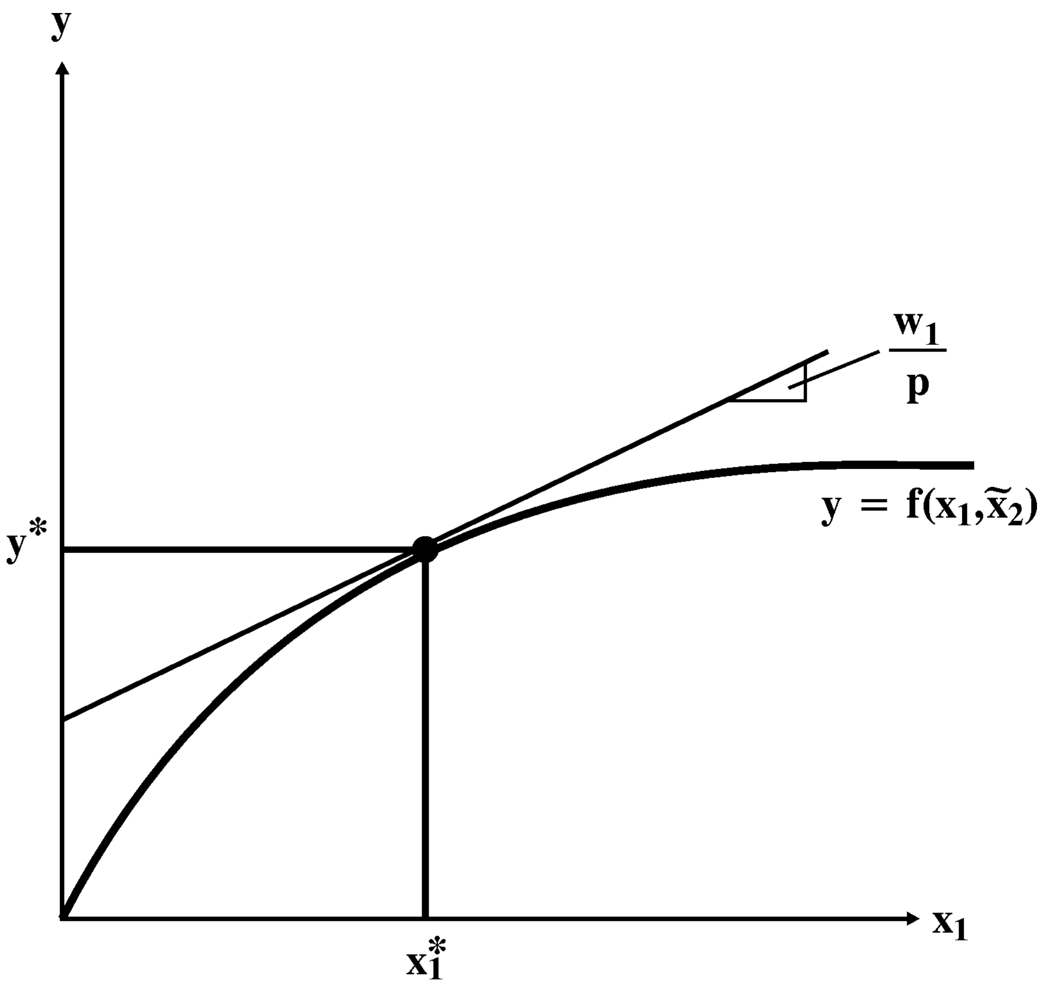


$$\pi \rightarrow \pi^*$$

$$\text{ha } x_1' \;:\; (pMP_1' > w_1) \;\Rightarrow\; (x_1' \rightarrow x_1^*)$$

$$\text{ha } x_1'' \;:\; (pMP_1'' < w_1) \;\Rightarrow\; (x_1'' \rightarrow x_1^*)$$

16.7
A termelési függvény konkavitása esetén a maximum másodrendű feltétele automatikusan teljesül



ERF: $$p\frac{\partial f(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1} - w_1 = 0$$

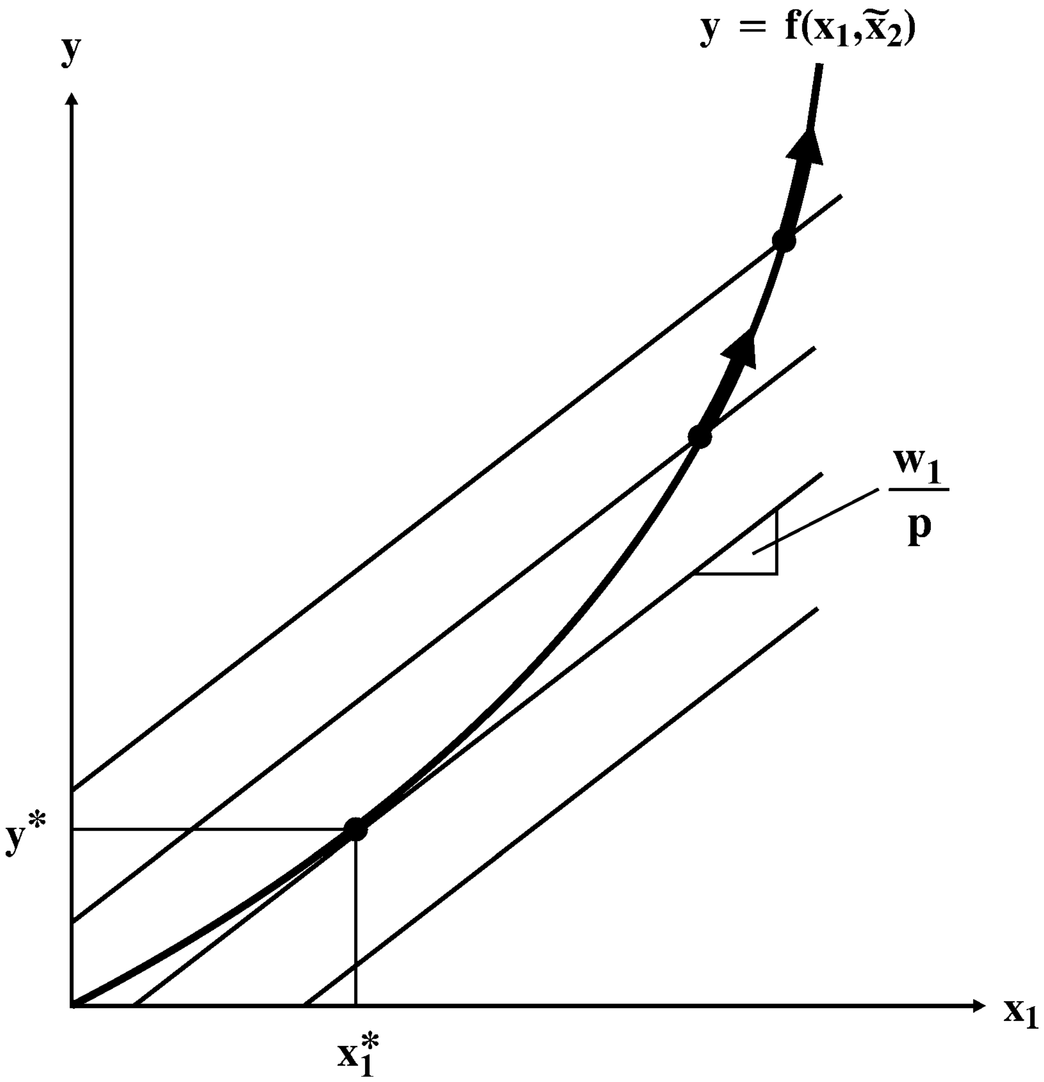
MRF: $$p\frac{\partial f^2(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1^2} < 0 \qquad \text{(MAX!)}$$

$\pi \rightarrow$ **max!:** $x_1^* < \infty$

$y^* < \infty$

$\pi^* < \infty$

16.8
Konvex termelési függvény esetén a profitmax feladatnak nincs véges megoldása



ERF: $$p\frac{\partial f(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1} - w_1 = 0$$

MRF: $$p\frac{\partial f^2(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1^2} > 0 \quad \text{(MIN!)}$$

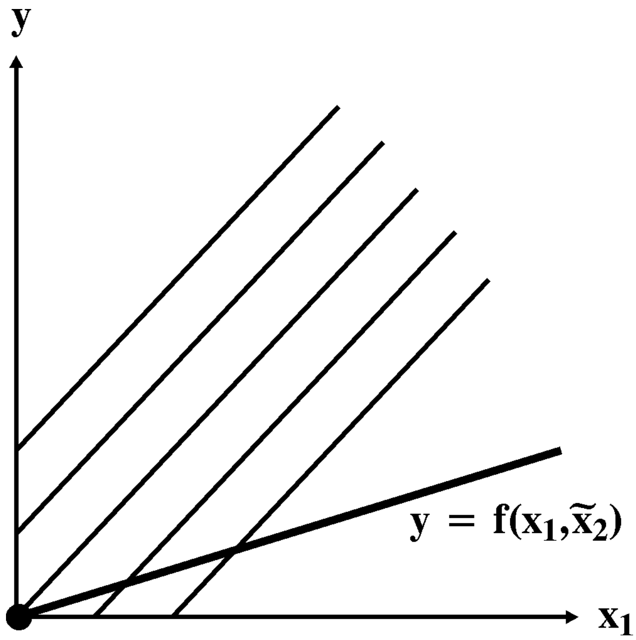
$\pi \to$ **max!:**

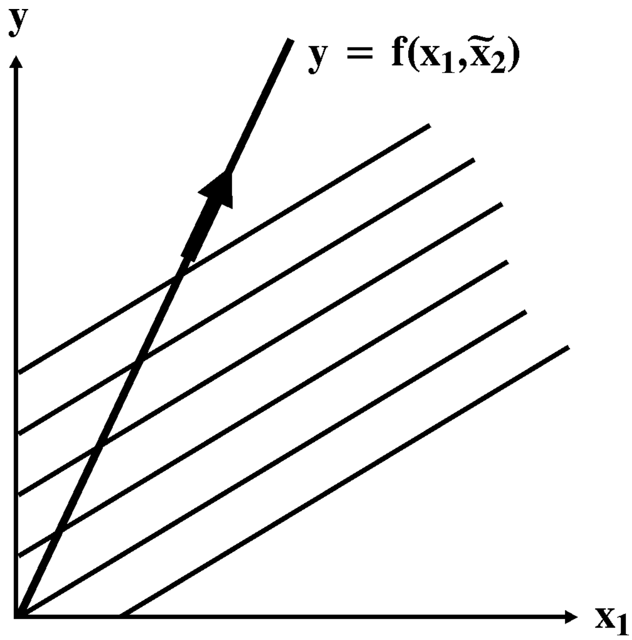
$x_1^* \to \square$

$y^* \to \square$

$\pi^* \to \square$

16.9
Lineáris termelési függvénynél (általános esetben) a profitmax feladathoz vagy zérus, vagy végtelen értékű megoldás tartozik





$$\pi \to \max! : \; x_1^* = 0, \quad y^* = 0, \quad \pi^* = 0$$

$$\pi \to \max! : \; x_1^* \to \infty, \quad y^* \to \infty, \quad \pi^* \to \infty$$

16.10
A rövid távú profitmax feladat megoldása: az x_1 tényező kereslete és az y output kínálata

A feladat elsőrendű feltétele (lásd 16.3 fólia):

$$p\frac{\partial f(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1} = w_1 \qquad (4)$$

Oldjuk meg x_1^*-re:

$$x_1^* = x_1^*\left(w_1, p \mid x_2 = \tilde{x}_2\right) \qquad (5)$$

Ezzel megkapjuk a tényezőkeresleti függvényt.

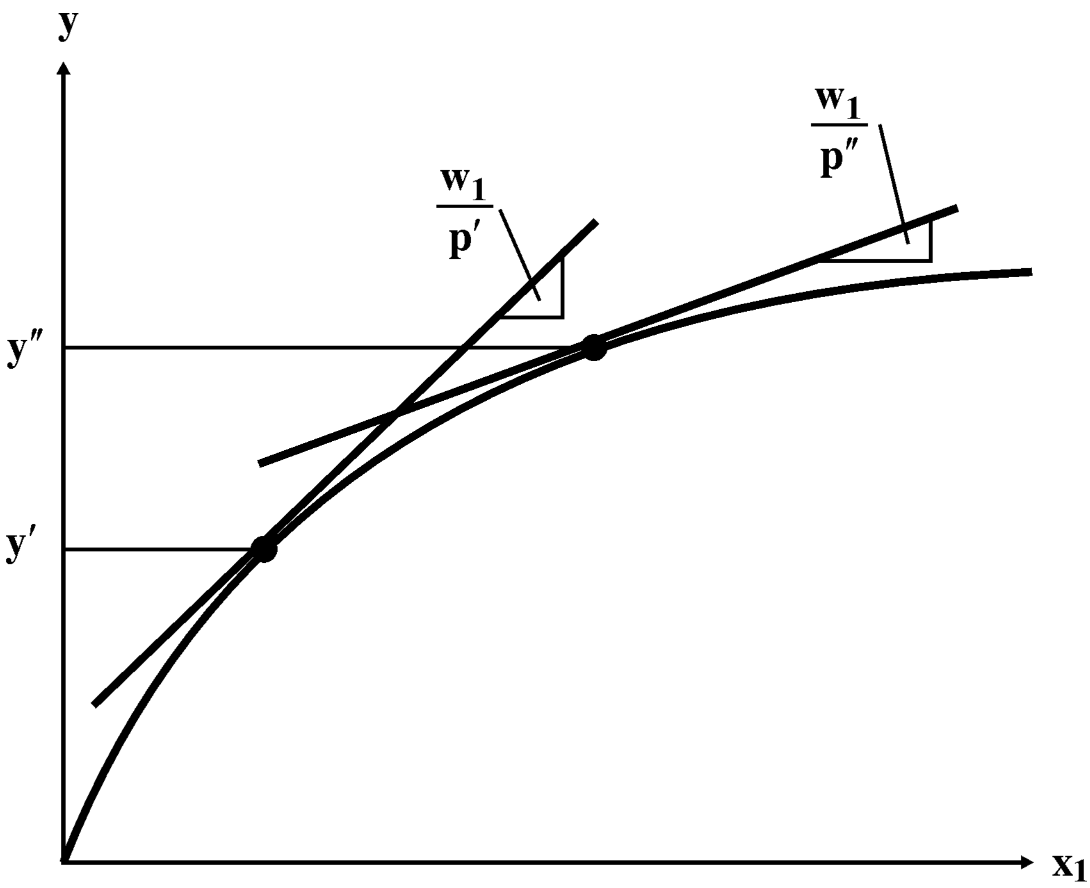
Helyettesítsük vissza (5)-öt az $y = f\left(x_1, \tilde{x}_2\right)$ termelési függvénybe:

$$y = f(x_1^*(w_1, p \mid x_2 = \tilde{x}_2), \tilde{x}_2) \qquad (6)$$

Így megkapjuk a vállalat kínálati függvényét (rögzített $\tilde{x}_2$ érték mellett)

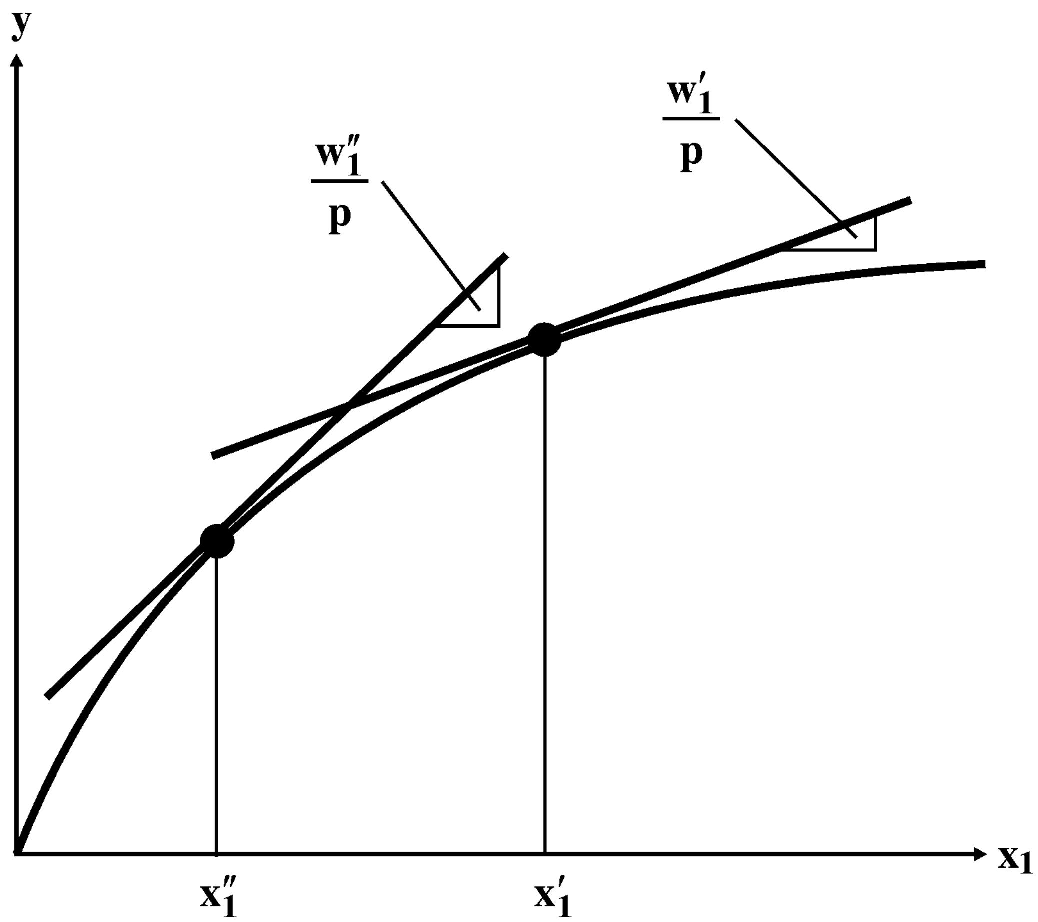
$$y = y\left(p, w_1\right) \qquad (6')$$

16.11
Komparatív statika (1)



$$p'' > p' \Rightarrow y'' > y'$$

16.12
Komparatív statika (2)



$$w_1'' > w_1' \Rightarrow x_1'' < x_1'$$

16.13
A tényezőkeresleti görbe lejtése

A tényezőkeresleti függvényt:

$$x_1^* = x_1^*\left(w_1, p \middle| x_2 = \tilde{x}_2\right) \tag{1}$$

megkapjuk a profitmaximalizálási feladat elsőrendű feltételéből:

$$p\frac{\partial f(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1} - w_1 = 0 \tag{2}$$

Hogyan állapíthatjuk meg $\frac{dx_1^*}{dw_1}$ előjelét?

Differenciáljuk teljesen az elsőrendű feltételt x_1^* és w_1 szerint! Ekkor:

$$p\frac{\partial^2 f(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1^2}dx_1^* - dw_1 = 0 \tag{3}$$

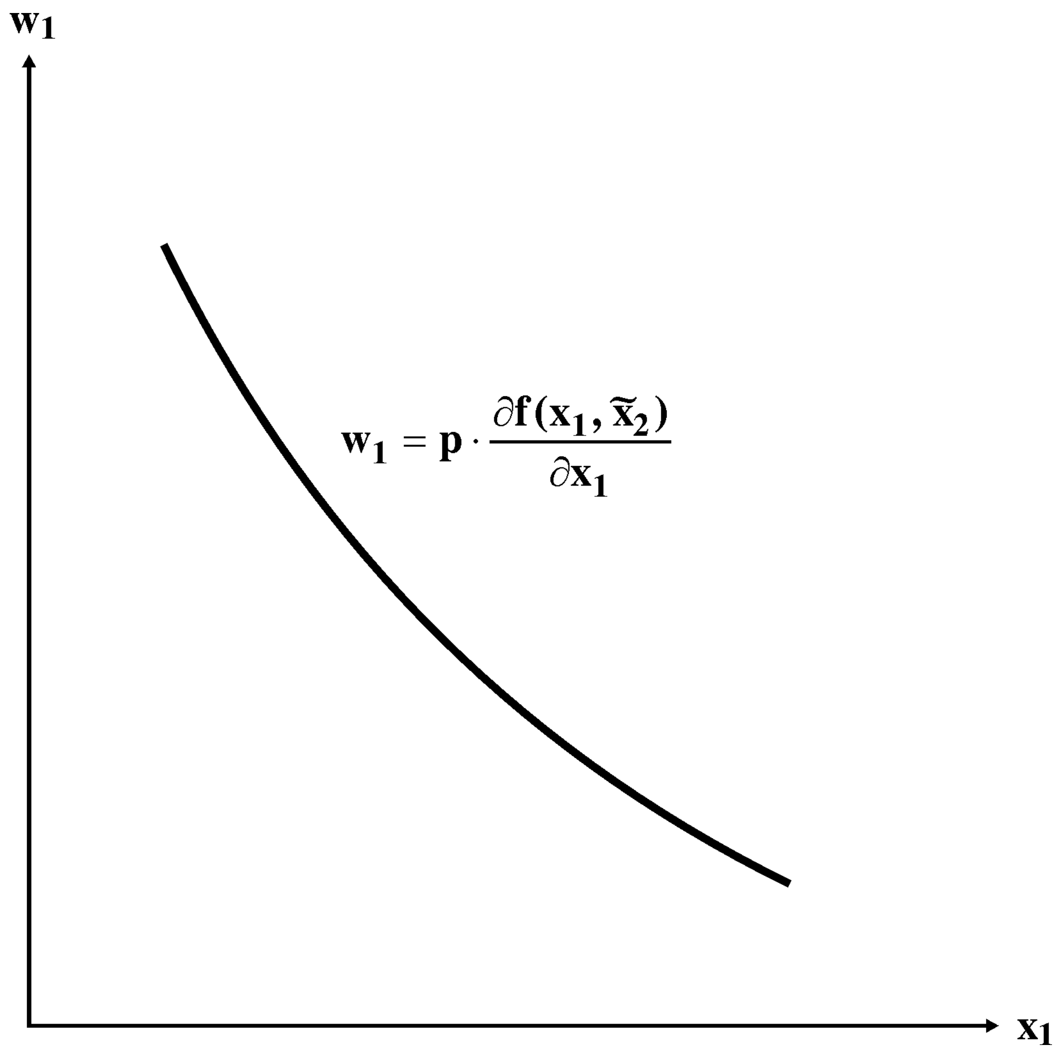
Átrendezve:

$$\frac{dx_1^*}{dw_1} = \frac{1}{p\frac{\partial^2 f(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1^2}}$$

Konkáv termelési függvény esetén: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$

Így: $\frac{dx_1^*}{dw_1} < 0.$

16.14
Az inverz tényezőkeresleti görbe



16.15/1
A profitmaximalizálási probléma megoldása, ha egyik tényező sem rögzített: hosszú táv

$$\max_{x_1,x_2} \; py - w_1 x_1 - w_2 x_2 \tag{1}$$

$$\text{kf}: \quad y = f(x_1, x_2) \tag{2}$$

Helyettesítsük be a korlátot a célfüggvénybe!

$$\max_{x_1,x_2} \; p\, f(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2 \tag{3}$$

Elsőrendű feltételek:

$$p \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - w_1 = 0 \tag{4}$$

$$p \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - w_2 = 0 \tag{5}$$

Átrendezve:

$$p\, MP_1(x_1^*, x_2^*) = w_1 \tag{4'}$$

$$p\, MP_2(x_1^*, x_2^*) = w_2 \tag{5'}$$

(4')-et (5')-vel elosztva:

$$\frac{MP_1(x_1^*, x_2^*)}{MP_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{w_1}{w_2} \tag{6}$$

Vagy:

$$TRS(x_1^*, x_2^*) = -\frac{w_1}{w_2} \tag{6'}$$

16.15/2
A profitmaximalizálási probléma megoldása, ha egyik tényező sem rögzített: hosszú táv (folytatás)

Az elsőrendű feltételek segítségével meghatározhatjuk a tényezőkeresleti függvényeket:

$$x_1^* = x_1^*(w_1, w_2, p) \tag{7}$$

$$x_2^* = x_2^*(w_1, w_2, p) \tag{8}$$

(7)-et és (8)-at behelyettesítve a termelési függvénybe (2), meghatározhatjuk a vállalat kínálati függvényét:

$$y = f(x_1^*(w_1, w_2, p), x_2^*(w_1, w_2, p)); \tag{9}$$

$$y = y(p, w_1, w_2) \tag{10}$$

16.16
Állandó mérethozadék esetén nem létezik pozitív korlátos maximumprofit-érték

Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik $0 < \pi^* < +\infty$.

Ekkor:

$$\pi^* = pf(x_1^*, x_2^*) - w_1 x_1^* - w_2 x_2^*$$

Növeljük a ráfordításokat, x_2/x_1 arány változatlanul hagyásával, t-szeresére ($t > 1$).

Állandó mérethozadék esetén:

$$\begin{aligned} pf(tx_1^*, tx_2^*) - w_1 tx_1^* - w_2 tx_2^* \\ &= t(pf(x_1^*, x_2^*) - w_1 x_1^* - w_2 x_2^*) \\ &= t\pi^* > \pi^* \end{aligned}$$

Ellentmondás. Ha π^* maximális volt, akkor a ráfordítások növelésével nem növelhetjük tovább a profitot. Kivéve, ha: $\pi^* = 0$.

Állandó mérethozadék csak akkor egyeztethető össze a korlátos maximumprofit-értékkel, ha:

$$\pi^* = 0.$$

16.17
A profitmaximalizálási feladat indirekt (két lépéses) megoldása

1. **lépés: KÖLTSÉGMINIMALIZÁLÁS**

> **Megvizsgáljuk, hogyan minimalizálhatjuk a költségeket a termelés egy tetszőlegesen <u>adott</u> szintjén.**

2. **lépés: PROFITMAXIMALIZÁLÁS**

> **A legalacsonyabb költségű technológiának (a költségminimalizálási feladat megoldásának) ismeretében meghatározzuk a lehetséges legmagasabb profitot biztosító termelési szintet.**

16.18
A költségminimalizálási feladat algebrailag (1. lépés)

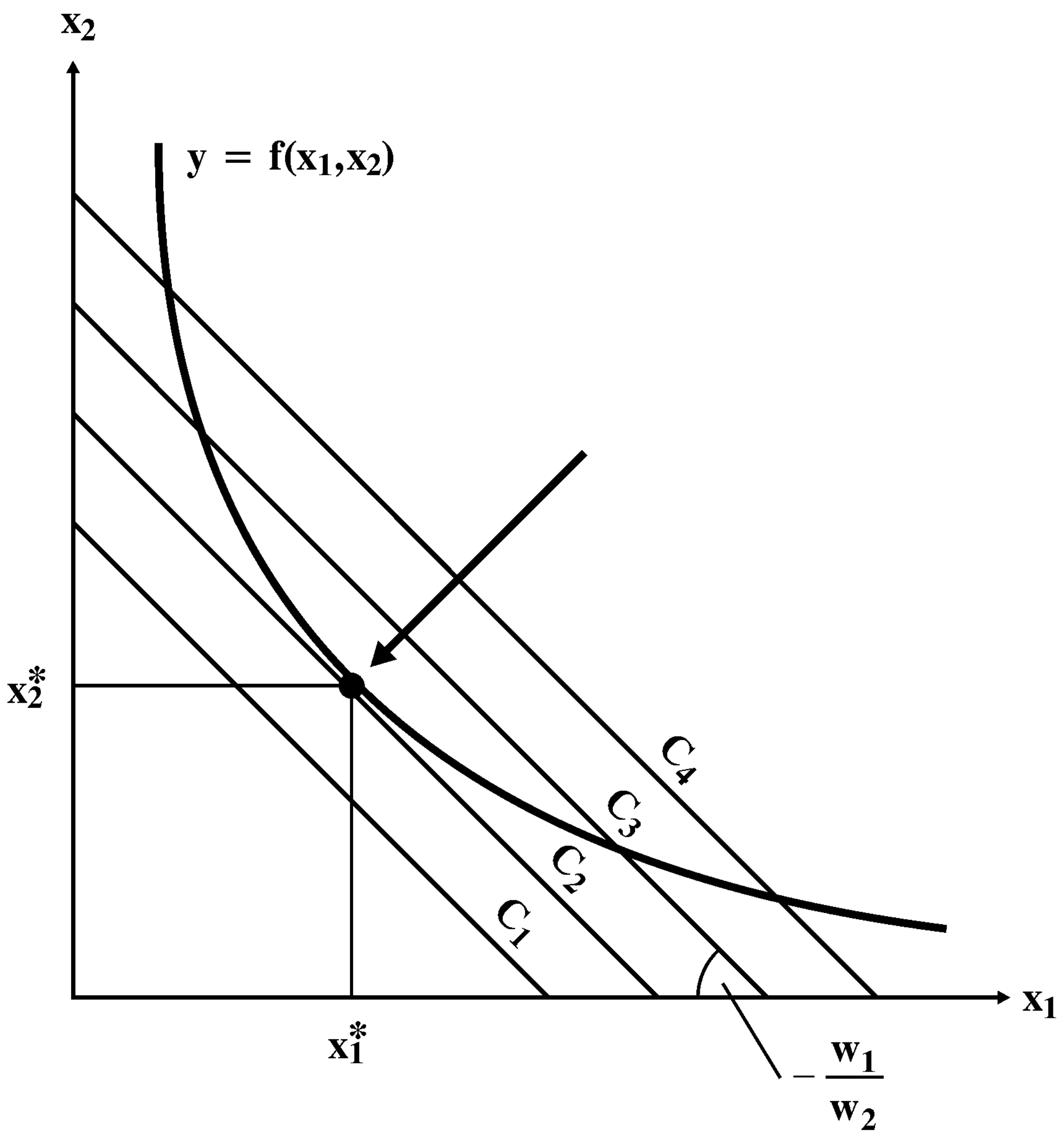
Keressük az adott y kibocsátási szintet megvalósító legolcsóbb eljárást, amennyiben a technológiát az $y = f(x_1, x_2)$ termelési függvény írja le:

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\limits_{x_1, x_2} \left(w_1 x_1 + w_2 x_2\right) \\ \quad \text{kf}: \ y = f(x_1, x_2) \end{array}}$$

16.19
A költségminimalizálási feladat grafikusan

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = C$$

$$x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1$$



$$\ldots C_1 < C_2 < C_3 < C_4 \ldots$$

16.20
A költségminimalizálási feladat algebrai megoldása

$$\min_{x_1,x_2} \left(w_1x_1 + w_2x_2\right) \tag{1}$$

$$\text{kf}: \quad y = f\left(x_1, x_2\right) \tag{2}$$

Írjuk föl a Lagrange-feladatot!

$$\min_{x_1,x_2,\lambda} L = w_1x_1 + w_2x_2 - \lambda\left(f\left(x_1, x_2\right) - y\right) \tag{3}$$

Elsőrendű feltételek:

$$x_1 : \; w_1 - \lambda \frac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} = 0 \tag{4}$$

$$x_2 : \; w_2 - \lambda \frac{\partial f\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2} = 0 \tag{5}$$

$$\lambda : \qquad f\left(x_1, x_2\right) = y \tag{6}$$

Rendezzük át a (4)-es és (5)-ös elsőrendű feltételeket, és osszuk el őket egymással! Megkapjuk az ismert feltételeket:

$$\frac{\partial f\left(x_1, x_2\right) / \partial x_1}{\partial f\left(x_1, x_2\right) / \partial x_2} = \frac{w_1}{w_2} \tag{7}$$

Más formában felírva:

$$\frac{MP_1\left(x_1, x_2\right)}{w_1} = \frac{MP_2\left(x_1, x_2\right)}{w_2} \tag{7'}$$

16.21
A költségminimalizálási feladat algebrai megoldása (folytatás)

Folytassuk ott, ahol a 16.20-as fólia (7)-es egyenleténél abbahagytuk: az x_1-hez és x_2-höz tartozó elsőrendű feltételek hányadosánál:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2} = \frac{w_1}{w_2} \qquad (7)$$

Egészítsük ki ezt a λ-hoz tartozó elsőrendű feltétellel:

$$f(x_1, x_2) = y \qquad (6)$$

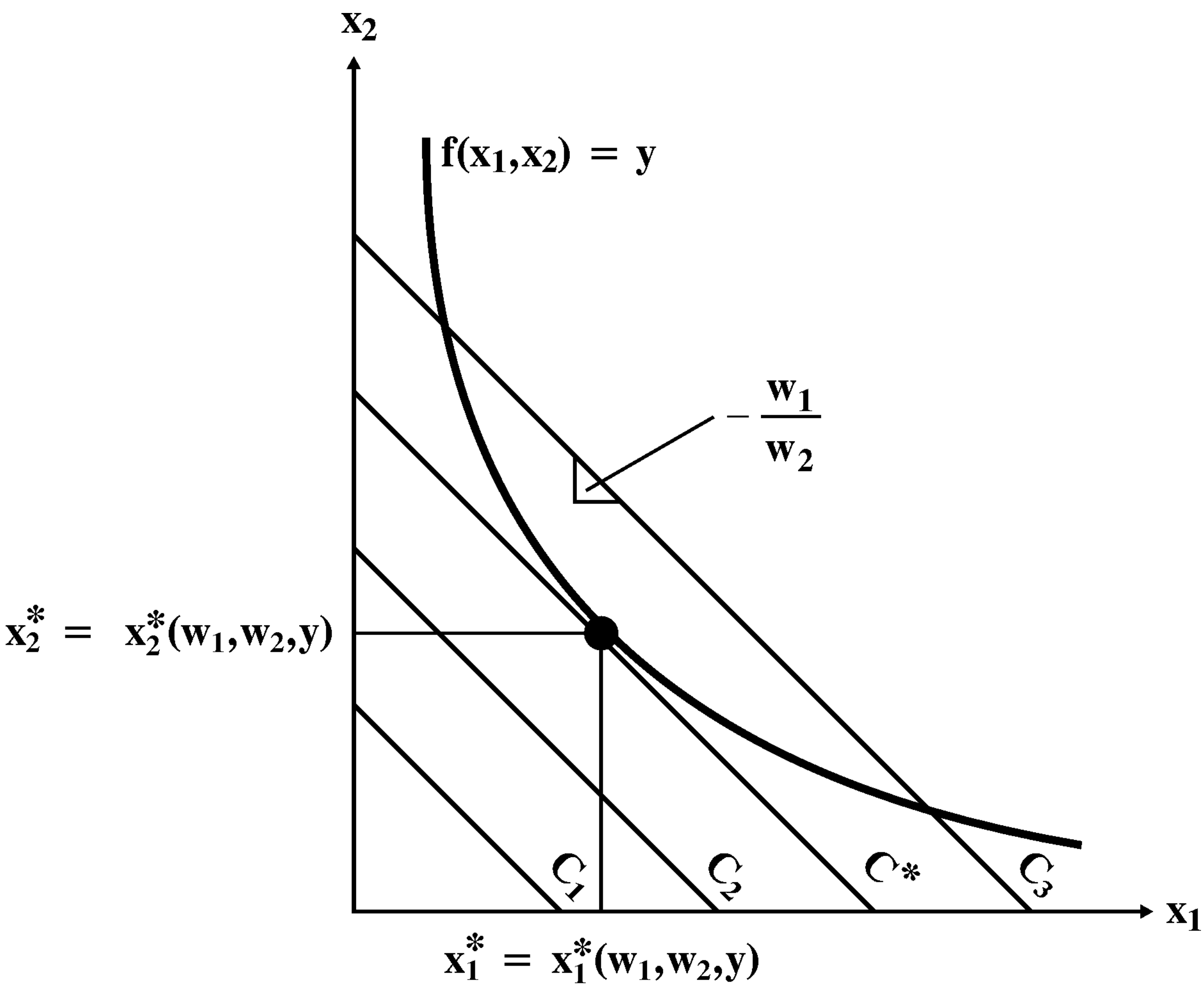
Két ismeretlenünk van két egyenlethez. Oldjuk meg (6)-(7) egyenletrendszert x_1^*-ra és x_2^*-re!

$$x_1^* = x_1^*(w_1, w_2, y) \qquad (8)$$

$$x_2^* = x_2^*(w_1, w_2, y) \qquad (9)$$

(8) és (9) a két tényező <u>feltételes</u> tényezőkeresleti függvényei: ($f(x_1, x_2) = y$ <u>feltétel</u> melletti keresleti függvények).

16.22
A költségfüggvény fogalmának bevezetése



Költségfüggvény:

$$c(w_1, w_2, y) = \{\min w_1x_1 + w_2x_2,\ f(x_1, x_2) = y\}$$

$$= w_1x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2x_2^*(w_1, w_2, y),$$

ahol $x_1^*(.)$ és $x_2^*(\ )$ függvények a költségminimalizálási feladat megoldásából származtatott feltételes tényező-keresleti függvények.

16.23
A költségminimalizálási feladat eredményét felhasználó profitmaximalizálási feladat és algebrai megoldása (2. lépés)

Induljunk ki a költségminimalizálási feladat megoldását megtestesítő költségfüggvényből:

$$\mathbf{c = c(w_1, w_2, y),} \qquad \mathbf{(1)}$$

és írjuk föl a segítségével az ismert profitmaximalizálási feladatot:

$$\max_{y} \ \pi = py - c(w_1, w_2, y). \qquad \mathbf{(2)}$$

Elsőrendű feltétel:

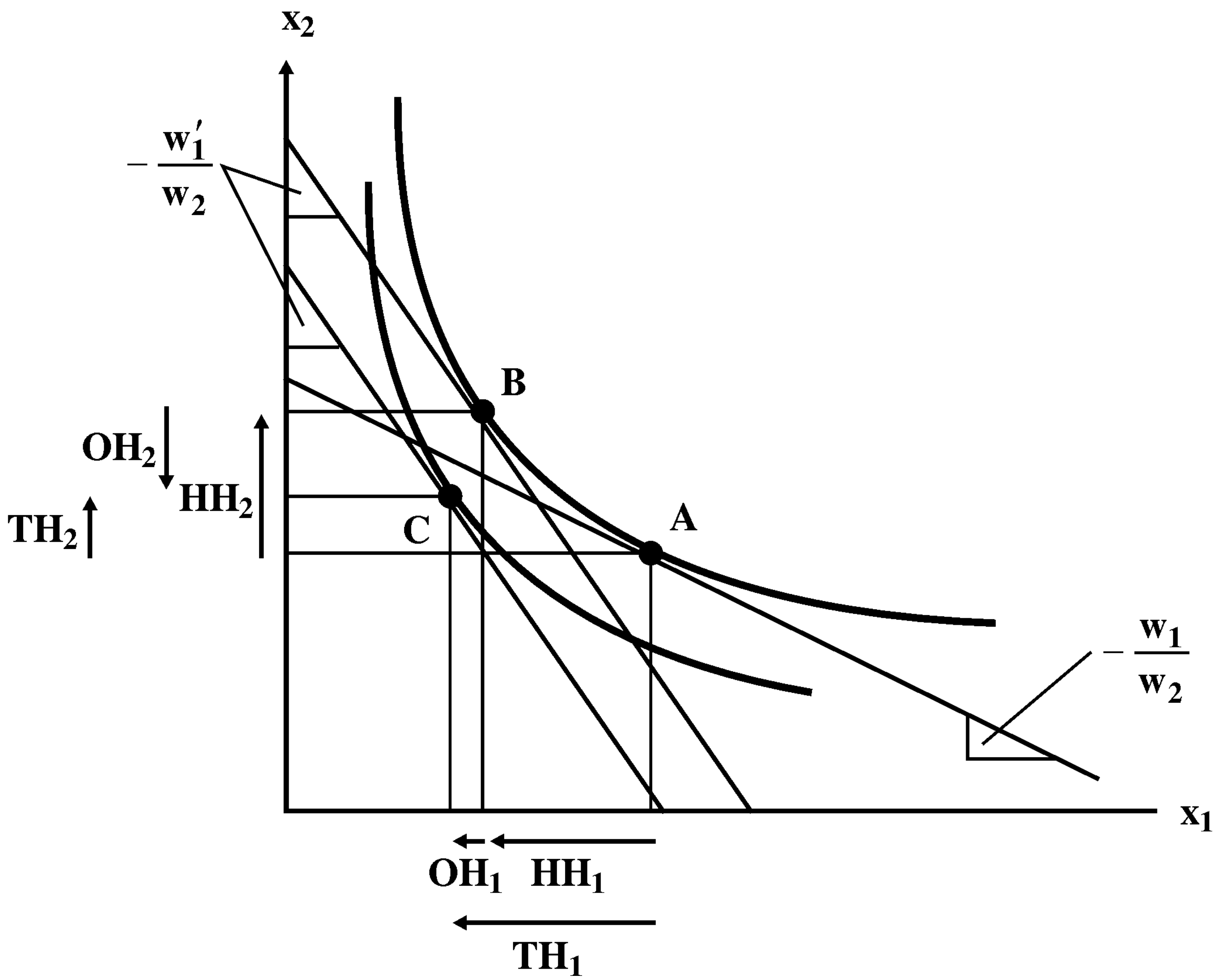
$$p = \frac{\partial c(w_1, w_2, y)}{\partial y} = MC. \qquad \mathbf{(3)}$$

y-t kifejezve ebből megkaphatjuk a vállalat kínálati függvényét:

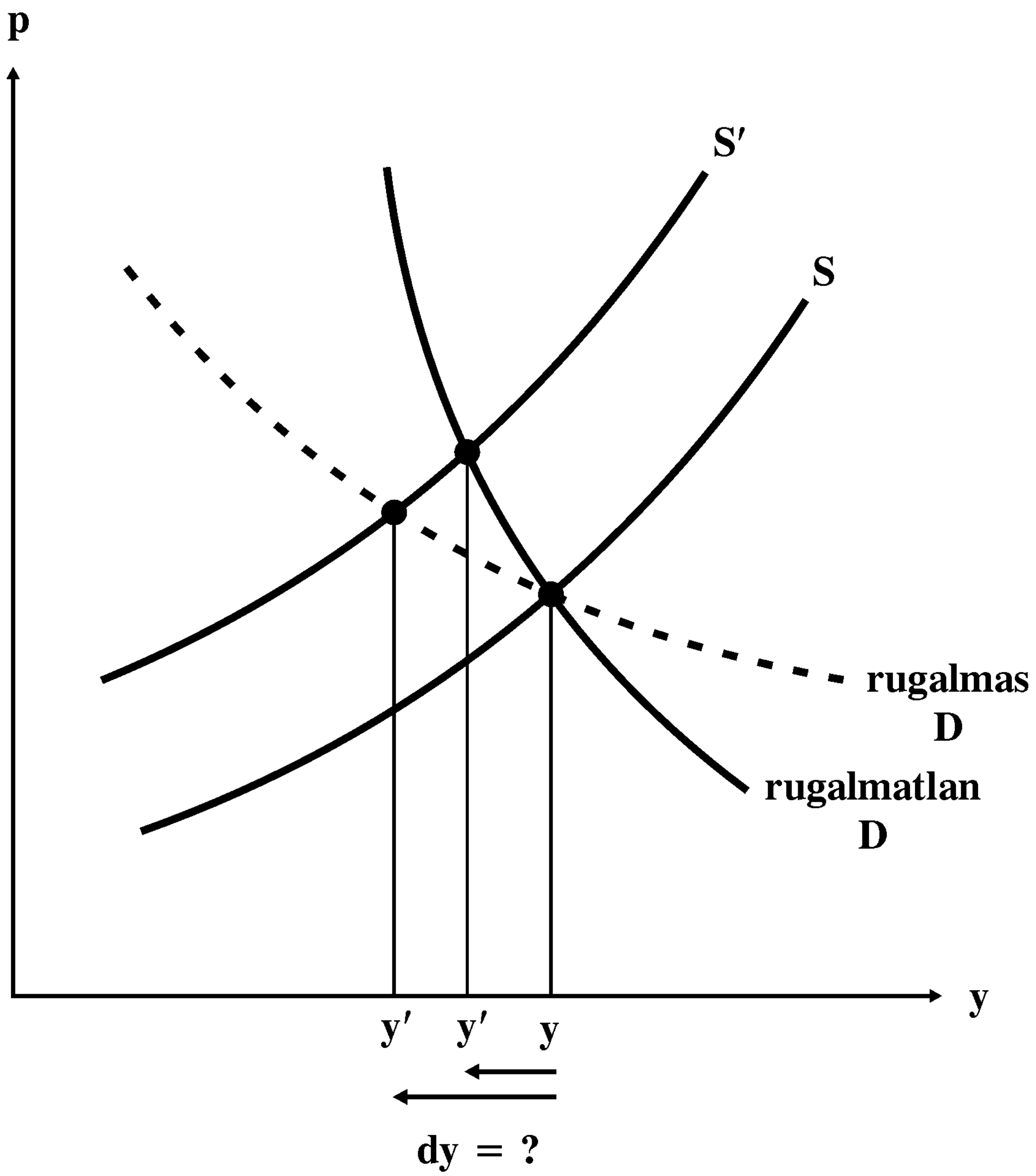
$$y = y(p, w_1, w_2). \qquad \mathbf{(4)}$$

16.24
A tényezők iránti kereslet alakulása a tényezőárak változásának függvényében (iparági szinten)

$$w_1 \Rightarrow w_1' \quad : \quad A \Rightarrow B \Rightarrow C$$



16.25
Az outputhatás nagysága a termékkeresleti görbe meredekségétől függ



$$dy = (y - y')$$