MIKRO-
ÖKONÓMIA
ELŐADÁSVÁZLATOK

15. előadás

TECHNOLÓGIA

Kertesi Gábor – Világi Balázs

Varian 18. fejezete erősen átdolgozva

15.1 Bevezető

– A második félévben is a közgazdaságtan legalapvetőbb modell-jének, a versenyzői piac modelljének kifejtésére helyezzük a hangsúlyt. A versenyzői piac modelljének jellemzésére szolgáló legalapvetőbb eszköz a kereslet és kínálat egyensúlyát leíró Marshall-kereszt:

15.1 fólia

– Az első félévi anyag zöme a **keresleti oldal** leírására szolgált. A közgazdaságtan legalapvetőbb elveiből kiindulva, a racionális egyéni **fogyasztói viselkedés modelljét** alkalmazva, alkottuk meg lépésről-lépésre a piaci keresleti oldalát leíró **piaci keresleti függvényt** (illetve keresleti görbét).

– A második félévi anyag homlokterében a piac másik oldala – a kínálat – áll. A **kínálati oldal** modellezésére az első félévben is alkalmaztunk piaci kínálati függvényeket; ezeket azonban oly módon konstruáltuk meg, hogy közben nem firtattuk, mi módon jutottak a kínálati oldalon álló piaci szereplők készleteikhez (eladásra kínált javaikhoz). A rezervációs árak modelljének alkalmazásával határoztuk meg a piac kínálati oldalát leíró piaci kínálati függvényt. A diákok részére lakásokat bérbeadó lakástulajdonosok példáján mutattuk be ezt az eljárást a keresleti-kínálati elemzés logikáját szemléltető 3., illetve a piaci egyensúly létrejöttét taglaló 12. előadás során.

– A második félévben szakítunk ezzel az egyszerűsítő feltételezéssel. Abból az általánosabb esetből indulunk ki, amikor egy piaci szereplő (egyén vagy vállalat) **termelés** útján **állítja elő** az általa eladásra kínált termékeket. A termelés itt egyszerűen azt jelenti, hogy a piaci szereplő (a vállalat) bizonyos erőforrások (inputok vagy termelési tényezők) felhasználásával értékesíteni kívánt termékeket (outputokat) állít elő. Akárcsak a fogyasztáselméletben, e helyütt is a legelemibb egységekből és a racionális viselkedés alapvető modelljéből kiindulva építjük fel az elméletet.

– A legelemibb egységből indulunk ki. Vagyis: először **egyetlen vállalat** döntését elemezzük; annak révén határozzuk meg a vállalati kínálatot. Majd a vállalati kínálati függvények **aggregálása** révén határozzuk meg a **piaci kínálati függvényt**. Az egyedi vállalat viselkedésének vizsgálatakor a racionális viselkedés modelljét alkalmazzuk: meghatározzuk a termelést folytató **vállalat célját** és döntési **lehetőségeit**. Ahogy a fogyasztói elméletben a racionálisan viselkedő fogyasztóról feltételeztük, hogy célját úgy igyekszik elérni (a számára legnagyobb hasznosságot képviselő jószágkosarat úgy igyekszik biztosítani), hogy közben tekintetbe veszi az előtte nyitva álló döntési lehetőségeket (hogy jövedelme és az árak alapján milyen jószágkosarakat képes megfizetni), úgy a termelői elméletben a racionálisan viselkedő vállalatról azt feltételezzük, hogy célját (a lehető legmagasabb profitot) úgy igyekszik elérni, hogy közben figyelembe veszi a ráfordítások és kibocsátások közötti technológiai összefüggéseket.

– A kínálat elméletét kifejtő hat előadás során nagy vonalakban a következőképpen fogunk eljárni:

(a) a 15. előadás során rekonstruáljuk a vállalat termelési döntési lehetőségeit reprezentáló **technológiákat**;

(b) a 16. előadás során meghatározzuk a vállalat célját (a maximális profit elérését), és **kétféle** (egy közvetlen és egy közvetett) módon írjuk föl a **profitmaximalizálási** feladatot;

(c) a 17. és 18. előadást a **vállalati szintű optimális döntés** meghatározásának szenteljük. Minthogy a vállalat ráfordítá-sok felhasználásával állít elő eladásra szánt termékeket, a vállalati optimális döntés két dolog **szimultán** meghatározását jelenti: a vállalat eldönti, milyen ráfordításokból mennyit használ föl, vagyis: mennyit használ föl az egyes termelési tényezőkből (**tényezőkeresleti döntés**); illetve eldönti, mennyit kíván előállítani az eladásra kínált termékből (**kínálati döntés**).

(d) a 19. előadás során a vállalati szintű optimális döntés alapul- vételével megkonstruáljuk a **vállalat kínálati függvényét, illetve kínálati görbéjét**, illetve a vállalati kínálati függvények (görbék) iparági szintű aggregálásával meghatározzuk az **iparági** (vagy más néven: **piaci**) **kínálati függvényt**, illetve **kínálati görbét**.

(e) a 20. előadás során végül – általánosságban és példák segítségével – elemezzük a **rövid és hosszú távú iparági egyensúly** tulajdonságait.

– Néhány további előzetes megjegyzést kell fűznünk az előttünk álló előadások anyagához:

1. Az előttünk álló hat előadás során mindvégig egyetlen piacformát feltételezünk: **versenyzői piacot**. A versenyzői piac modelljét a kínálati oldal elméletének kifejtése teszi teljessé. A félév további részében a versenyzői piactól eltérő piacszerkezeteket is szemügyre veszük: 21. előadás: monopólium; 22. előadás: oligopólium.

2. A kínálati oldal leírásának alapjául szolgáló **termeléselmélet** szoros analógáikat mutat a keresleti oldal leírásának alapjául szolgáló **fogyasztáselmélettel**. Ezekre az **analógiákra** (hasonlóságokra) folyamatosan felhívjuk a figyelmet, mindenkor figyelmeztetve azonban az egyébként meglevő – nem lényegtelen – **különbségekre**.

3. A fogyasztás-, illetve termeléselmélet közti hasonlóságok között kitüntetett jelentősége van a mindkét elméletet átható **dualitási szemléletnek**. A fogyasztási elméletet jellemző dualitás (a hasznosságmaximalizálási, illetve kiadásminimalizálási probléma dualitása) igen nagy hangsúlyt kapott az első félévben. Hasonlóan nagy hangsúlyt kap most, a második félévben a termeléselméletet jellemző dualitás. A dualitás **rendet teremt,** megértése pedig **segít eligazodni** az egyébként első látásra meglehetősen szerteágazónak tűnő termeléselmélet fogalmai között.

– Ennyi előkészítés után bele is vághatunk a közepébe. Kezdjük a technológiákkal!

15.2 Technológia, termelési függvény

– A termelői döntés tanulmányozását a termelő vállalat döntési **korlátainak** tanulmányozásával kezdjük. A termelői döntést hozó vállalatnak mindenekelőtt technológiai korlátokkal kell szembenéznie. E technológiai korlátok a legáltalánosabb értelemben azt jelentik, hogy – tudásunk mindenkori szintjének megfelelően – a ráfordításokból (inputokból) csak meghatározott módokon tudunk termékeket (outputokat) előállítani: csak bizonyos termelési eljárásokat választhatunk. Az alábbiakban azt vizsgáljuk meg, miképpen írja le a közgazdaságtan ezeket a technológiai korlátokat.

– A termelési ráfordításokat **termelési tényezők**nek ($x_1, x_2, ..., x_n$) nevezzük. A termelési ráfordítások segítségével a vállalat **termékeket** állít elő ($y_1, y_2, ..., y_k$). Ezeknek a termékeknek a (természetes mértékegységben mért) volumene alkotja a vállalat **kibocsátását** (más szóval: termelését vagy outputját).

15.2 fólia

– A technológiai korlátok azt jelentik, hogy egy adott mennyiségű terméket csak meghatározott módon, bizonyos inputkombinációk révén tudunk előállítani. Legjobb lesz, ha rögtön veszünk egy példát. Tegyük föl, hogy cserépedényt (*y*) akarunk előállítani. Háromféle ráfordítást használunk: emberi **munkát**: a fazekas szakember munkáját (x_1), egy gépi berendezést (korongozógépet), közgazdasági szaknyelven: tőkét (x_2), valamint nyersanyagként agyagot (x_3). A háromfajta ráfordítást alapul véve, a termelési lehetőségek halmazát az alábbi táblázat írja le:

15.3 fólia

– A táblázat egy tetszőleges sora azt mutatja meg, hogy **a ráfordításfajták különböző – technológiailag lehetséges – kombinációi naponta *maximálisan* hány termék előállítását teszik lehetővé**. A táblázatban szereplő példa azt hivatott szemléltetni, hogy ugyanazt a maximális napi termékmennyiséget többféle termelési eljárással (többféle tényezőfelhasználással) is előállíthatjuk. Például: napi 1000 cserépedényt viszonylag kevés munkafelhasználással és intenzív gépkihasználással (*B* inputkombináció révén), de magas munkaráfordítással és alacsony géphasználattal (*A* inputkombináció révén) is előállíthatunk.[1]

– A táblázat alján látható függvény a ráfordítások és az általuk **maximálisan** megtermelhető kibocsátás közti összefüggést rögzíti. Ezt a függvényt **termelési függvénynek** nevezzük. A termelési függvény vizsgálata lesz a kiindulópontunk. Először is néhány problémát kell tisztáznunk a termelési függvénnyel kapcsolatban.

15.3 Értelmezési problémák a termelési függvénnyel kapcsolatban

– **1. Adottság vagy döntés tárgya-e a vállalat számára a termelési függvény?** A termelés nem légüres térben zajlik, hanem bonyolult munkamegosztás által tagolt gazdaságban. Ennek messzemenő következményei vannak a vállalat által alkalmazott technológiára, és ennek megfelelően a vállalat termelési függvényére nézve. Vegyünk egy egyszerű példát! Egy autógyár gépkocsit (*y*) állít elő háromfajta ráfordítás: munkaerő (x_1), gépek-berendezések-épületek (x_2), illetve nyersanyagok (x_3) felhasználásával. A gyártási folyamat során közbülső termékeket is – mondjuk: részegységeket: kuplungot, sebességváltót stb. (x_4) – előállít saját szervezetén belül. A végtermék előállítására e közbülső termékeket is

[1] *B* technológia magas anyagfelhasználása például származhat abból, hogy intenzívebb géphasználat és kevesebb emberi felügyelet mellett nagy az anyagpazarlás (sok a selejt).

felhasználja. Termelési függvénye azonban ráfordításként csak a külső forrásból származó termelési tényezőket tartalmazza: $y = f(x_1, x_2, x_3)$ Egy másik autógyár külső szállítótól vásárolja ezek a részegységeket is. Az ő termelési függvénye: $y = g(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

15.4 fólia

Az autógyár számára a technológia valójában nem külső adottság. Az is **gazdasági döntés** kérdése, hogy a két technológia közül melyiket választja. Intuitíve is világos, hogy azt a technológiát célszerű választania, amelynek révén olcsóbban tud gépkocsikat előállítani.

A szóban forgó dilemma egy általánosabb problémára is rávilágít. Nevezetesen arra, hogy maga az a tény is magyarázatra (mégpedig közgazdasági magyarázatra) szorul, hogy egy modern gazdaságban a termékek többségének előállítására általában sok embert foglalkoztató nagyobb szervezetek (vállalatok) keretei kötött kerül sor, és nem pusztán piaci tranzakciók révén egymással kapcsolatban levő, elkülönült egyéni termelők által. **Miért vannak vállalatok?** Miért nem szerződik le a kohász az év minden egyes hetében a kohászati művekkel bizonyos öntvények leszállítására? Ahelyett, hogy ezt tenné, miért a munkáját értékesíti, s miért engedi át a vállalatatvezetés számára a munkaidejének felhasználása fölötti rendelkezési jogokat? Miért *munkavállalási szerződést* köt a kohászati művekkel, ahelyett, hogy külső vállalkozóként hétről-hétre megújított *szolgáltatási szerződést* kötne vele?

Az ilyen és ehhez hasonló kérdések vizsgálata meghaladja egy alapozó mikroökonómiai kurzus szintjét.[2] Ennek ellenére nem árt tudnunk e tágabb problémának (a technológiák endogenitásának) a létezéséről. A probléma vizsgálatával egy külön diszciplína – a vállalatelmélet – foglalkozik, melynek elemeivel későbbi tanulmányaik során a piacszerkezetek, a vállalati pénzügyek és a vállalatgazdaságtan tárgyak keretében találkozni fognak. A továbbiakban azt feltételezzük, hogy a technológia a vállalat számára külső adottság.

– **2. Milyen erőforrásokat tekinthetünk termelési tényezőnek?** A termelési tényezőket (ráfordításokat) a lehető legtágabb értelemben célszerű felfognunk. Termelési tényezők lehetnek a legkülönbözőbb természeti erőforrások, különböző típusú és minőségű fizikai javak és szolgáltatások, különböző típusú (képzettségigényű) munkafajták, vállalatvezetői kvalitások stb.

Egyes tankönyvekben a termelési tényezőket a 19. században megszokott osztályozás szerint három típusra bontják: **föld, munka, tőke**[3], – „földön” valamilyen *természet által adott* mennyiségű erőforrást értve, „tőkén” (ezzel szemben) valamilyen *termelés révén létrehozott* erőforrást értve, „munkán” pedig valamilyen *homogén munkavégző képességet* értve.

Igen könnyű megmutatni, mennyire önkényes, és sok esetben mennyire félrevezető ez az osztályozás. Az, hogy a föld mennyisége – például a termőföld mennyisége (kínálata) – sok esetben mennyire nem a természet által rögzített, azt könnyen beláthatjuk, ha

[2] Elsősorban azért, mert haladó ismereteket feltételez a bizonytalanság és az információ közgazdaságtanának köréből.
[3] Frank Knight, amerikai közgazdász (1885-1972) a föld, a munka és a tőke termelési tényezőit „a közgazdaságtan szentháromságának” nevezte.

belegondolunk abba, hogy talajjavítás, öntözés és egyéb beruházások segítségével milyen nagy mértékben növelhető a *termő*föld területe. A „munka” mint termelési tényező inhomogenitása meglehetősen kézenfekvő: az agysebész munkája nyilvánvalóan nemcsak kvantitatíve, de kvalitative is különbözik a takarítónő munkájától. Továbbá: még ha homogénnek feltételezzük is a munkát mint termelési tényezőt, a munkavégző képességet magát is felfoghatjuk olyan erőforrásnak, amelynek mértékét tanulás révén (tudásba való befektetés révén) növelni vagyunk képesek. Vagyis a „munka” mint termelési tényező maga is hordozhat olyan tulajdonságokat, amelyek a fizikai tőkejavakkal mutatnak hasonlóságokat.[4]

Mindezzel nem azt mondjuk, hogy bizonyos elemzési célokra ne lenne értelme a hagyományos osztályozást használni. Mindössze azt állítjuk, hogy a termelési tényezők azonosításakor nem előre megadott osztályozási elvekhez kell ragaszkodnunk, hanem a **vizsgált probléma sajátosságait kell a modellalkotás során alapul vennünk**. A legegyszerűbb kéttényezős termelési modellekben általában a munka és a tőke termelési tényezőit szokás használni, és ilyenkor nincs okunk rá, hogy a különböző munkafajták inhomogenitását vagy az emberi munkavégző képesség tőkejavakhoz hasonló vonásait hangsúlyozzuk.[5] Ha viszont azt vizsgáljuk, mi határozza meg, hogy kik és milyen számban választják a középiskola utáni egyetemi továbbtanulás útját – bármilyen meglepő is, e probléma közgazdasági modellezésekor sem kerülhetjük el a termelési függvények alkalmazását –, akkor nagy hibát követnénk el, ha az emberi munkavégző képesség tőkejavakhoz hasonló vonásait figyelmen kívül hagynánk.

– **3. A termelési függvény változóinak mértékegysége.** A ráfordítások és a kibocsátás mérésekor – mint általában is minden modellalkotás esetén – pontosan tisztáznunk kell, hogy milyen mértékegységben mérjük a modellben alkalmazott változóinkat.

15.5 fólia

A **mennyiségeket** – a ráfordításokat (x_1, x_2, x_3) és a kibocsátást (y) – rendszerint folyamszemléletű (**flow**) egységekben mérjük: a munkát időegység (például egy nap) alatt felhasznált munkaórákban; a tőkét azzal, hogy egy meghatározott berendezést napi hány órán át használunk; az egyéb anyagokat a napi anyagfelhasználással (mértékegysége: valamilyen természetes mértékegység/idő). A kibocsátást szintén valamilyen naturális mértékegység időegységre jutó értékével mérjük. A termelési tényezők **árai** (w_1, w_2, w_3) ennek megfelelően a következők. A munkáé: időegységre jutó munkabér (órabér); a tőkéé: az adott gép időegységre jutó (itt: egy órai) használati díja (bérleti díja) stb. A kibocsátás ára nem más, mint a termék egységára (p) A vállalat tulajdonosa a ráfordítások időegységre jutó összértékét (a **költségeket** = $\sum w_i x_i$) egybeveti a kibocsátás időegységre jutó értékével (a **bevétellel** = py). Nyilván akkor jár jól, ha bevételei fedezik,

[4] Adam Smith ezt írta 1776-ban: „Ha valahol egy költséges gépet szereznek be, ettől azt várják, hogy az általa végzendő rendkívüli munkateljesítmény a beléje fektetett tőkét legalább a szokásos nyereséggel vissza fogja téríteni. Aki sok munka és fáradozás árán jutott el egy foglalkozásnál megkívánt rendkívüli ügyességhez és tudáshoz, ilyen költséges gépekhez hasonlítható. Attól a munkától, melyet megtanult, el kell tehát várnia, hogy a közönséges munkabéren kívül és fölött kiképeztetésének összes költségeit legalább egy hasonló tőke nyeresége szerint vissza fogja fizetni.” (Nemzetek jóléte, I. kötet, 106. old. Magyar Közgazdasági Társaság kiadása, Budapest, 1940.)

[5] Pedagógiai szempontból kifejezetten hasznos is, ha ilyen – egyszerű szerkezetű – modellekből indulunk ki. Mindazonáltal helytelen lenne azt gondolni, hogy – a probléma sajátosságaitól függetlenül – ezek és csakis ezek képzelhetők el, mint termelési tényezők.

illetve meghaladják a költségeit. Pontosabban: ha bevételének és költségeinek különbözete (a **profit=** π)[6] a lehető legnagyobb.

Az összköltségen belül a **tőke költségét** két különböző módon számíthatjuk ki. Tekintsük a 15.6-os fólián szereplő egyszerű számpéldát.

15.6 fólia

Feltesszük, hogy évi y mennyiségű output biztosításához egy egymillió dollár értékű berendezés évi 20.000 órányi használata szükséges. A vállalat tulajdonosa kétféleképpen okoskodhat. (*a*) Keres a piacon egy olyan céget, amely ilyen jellegű gépek bérbeadásával foglalkozik, és 20.000 órányi éves használatra bérbe veszi a gépet tőle w_1' dollár/óra bérleti díj fejében. Előfordulhat azonban, hogy nem talál egyetlen olyan céget sem a piacon, amely a szükséges berendezés bérbeadásával foglalkozna. (*b*) Ez esetben nem tehet mást, minthogy megvásárolja a szóban forgó, egymillió dollár értékű gépet. Mi lesz ebben az esetben vállalatunk éves tőkeköltsége? Megint csak két eset lehetséges: (*b*1) ha vállalatunknak nem áll rendelkezésére egymillió dollárnyi saját pénzösszeg (pénztőke), akkor hitelt kell felvennie. Tegyük föl, hogy 10 %-os éves kamatra tud ilyen összeget felvenni. A számpélda egyszerűsége kedvéért feltesszük, hogy évi 20.000 órányi, rendeltetésszerű használat után a berendezés mit sem veszít értékéből: a piacon egymillió dollárét értékesíthető. Ebben az esetben a vállalat éves tőkeköltsége: 1 millió dollár 10 %-os évi kamata, azaz: 100.000 dollár/év.[7] (*b*2) Mi a helyzet akkor, ha a vállalatnak saját bankszámláján rendelkezésre áll gépbeszerzés céljára a szükséges pénzösszeg? Mekkora lesz ez esetben a megvásárolt berendezés éves használatának költsége? Ugyanakkora: pontosan 100.000 dollár/év. Vállalatunk ugyanis megtehetné azt is, hogy a rendelkezésére álló egymillió dollárnyi pénzösszeget nem gépvásárlásra fordítja, hanem egy évre lekötve, bankszámlán helyezi el. Ha mégis gépet vásárol, ezzel évi 100.000 dollárnyi kamatról mond le. A saját pénztőke használatának is van költsége. Ez a költség épp azzal a nyereséggel egyenlő, amelyet az a számára elérhető legkedvezőbb alternatív befektetési lehetőség nyújtana, amelyről a szóban forgó cél érdekében lemondott. **Minden költség alternatív költség** (opportunity cost).

Mindezen megfontolások alapján meghatározhatjuk az adott gép egy órányi használatának bérleti díját (w_1' árat) is. Az egyszerűség érdekében föltesszük, hogy bérbeadási üzletág működtetése nem jár extra költségekkel. Ez esetben a bérbaadó cég egyetlen költsége az a 100.000 dollárnyi alternatív költség, amiről lemond akkor, ha a pénzét egy egymillió dollárt érő berendezés megvásárlásába és bérbeadásába fekteti, ahelyett, hogy évi 10 %-os kamat mellett a bankban kamatoztatná. Évi 20.000 órányi géphasználat neki pontosan 100.000 dollárba kerül. Ez akkor éri meg neki, ha összesen *legalább* 100.000 dollárt, vagyis gépóránként *legalább* 5 dollárt kér a gép használatáért. Ha a bérbeadási piacon tökéletes verseny uralkodik, akkor a bérbeadással foglalkozó cégek közti verseny pontosan az 5 dollár/óra szintre fogja leszorítani a bérleti díjat.

---

[6] Természetesen az *időegységre jutó* profit.

[7] E hipotetikus helyzetet úgy képzelhetjük el, hogy a vállalat minden év elején fölvesz egy egymillió dolláros hitelt évi 10 % kamatra; év végén eladja a gépet egymillió dolláért, és visszafizet a banknak 1 millió 100 ezer dollárt.

15. 4 Termelési függvény, izokvantok

– Ennyi előkészítés után rátérhetünk a termelési technológiák leírására szolgáló termelési függvény tulajdonságainak ismertetésére. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a vállalat egyetlen terméket (y) állít elő kétfajta ráfordítás (x_1, x_2) segítségével. A termelési technológiát ennek megfelelően az alábbi ábrán látható kétváltozós termelési függvény ($y = f(x_1, x_2)$) írja le:

15.7 fólia

– A termelési függvény a fogyasztási elmélet hasznossági függvényéhez hasonló elméleti konstrukció. Amíg azonban a hasznossági függvény értékeinek – a fogyasztási kosarakhoz rendelt hasznossági indexeknek – nincs magatartási tartalma, a termelési függvény argumentumaihoz (az inputkombinációkhoz) rendelt kibocsátási értékeknek van: azt a termelési mennyiséget adják meg, melyeket az adott inputkombinációk alkalmazásával maximálisan meg lehet termelni. Ennek következtében: amíg a hasznossági függvény esetében a monoton transzformációk megengedettek voltak (hiszen ott csak a preferenciarendezések számítanak, a hasznossági függvényen értelmezett távolságfogalom önkényes), addig a termelési függvény esetében **a monoton transzformációk nem megengedettek**, hiszen azok a termelés abszolút szintjét is megváltoztatják.

– Két input esetén a termelés összefüggéseit az ún. **egyenlőtermék-görbékkel** (más néven: **izokvantokkal**) ábrázolhatjuk. Az egyenlőtermék-görbék nem mások, mint a termelési függvény háromdimenziós gráfjának a síkra vetített szintvonalai (lásd 15.7 és 15.8 fóliák).

15.8 fólia

– Az egyenlőtermék-görbe (izokvant) azon x_1 és x_2 inputkombinációk halmazát testesíti meg, amelyek éppen elegendőek ahhoz, hogy egy adott outputmennyiséget megtermeljünk velük.

– Az izokvantok hasonlítanak a közömbösségi görbékhez. Mint korábban láttuk, a közömbösségi görbe azokat jószágkosarakat testesíti meg, amelyek éppen elegendőek ahhoz, hogy egy bizonyos hasznossági szintet elérjünk. Van azonban egy lényeges különbség a közömbösségi görbék és az izokvantok között. Az izokvantokhoz azt az outputmennyiséget rendeljük hozzá, amennyit termelni tudunk, nem pedig egy hasznossági szintet. Így az izokvantok "beszámozása" **a technológia által meghatározott**, s **nem önkényes választás** kérdése, mint a hasznosságok esetében.

15.5 "Jól viselkedő technológiák": monotonitás és konvexitás

– Ugyanúgy mint a fogyasztói elméletben, itt is megszokott dolog, hogy előre feltételezzük a technnológiák bizonyos tulajdonságait. Első feltételünk a **monotonitás**.

15.9 fólia

– A technológia monotonitásának feltételezése kimondja: ha az inputok közül egyik input mennyisége sem csökken, akkor az output mennyisége sem lehet kevesebb. (Szigorúbb módon megfogalmazva: ha legalább egy input mennyisége nő, miközben a többi input mennyisége nem csökken, akkor az output mennyisége is nő). A 15.9. fólián ez a tulajdonság jól nyomon követhető: ha egy izokvant tetszőleges pontjáról elmozdulunk, akkor északkeleti irányba haladva nem csökkenhet az output mennyisége.

– A másik, gyakran feltételezett tulajdonság a technológiák **konvexitása**.

15.10 fólia

– A technológia konvexitása azt jelenti: ha egy adott y kibocsátást (a_1, a_2) és (b_1, b_2) ráfordításokkal is előállíthatunk, akkor ezeknek az inputkombinációknak a súlyozott átlagával is *legalább akkora* (y) outputot tudunk megtermelni.

– A monoton és konvex technológiákat **"jól viselkedő technológiáknak"** szokták nevezni. A szemináriumon láthatnak majd példákat arra, milyen következményekkel jár az, ha a monotonitás vagy a konvexitás nem teljesül.

15.6 Példák technológiatípusokra

15.11 fólia

– **Rögzített arányú** (másnéven: **Leontief-féle**[8]) **technológia**: az inputokat mindig változatlan arányban használjuk. Például: a fólián látható esetben $\tilde{x}_2 / \tilde{x}_1 = a / b$. Ha 3$b$-nyi x_1 ráfordításhoz 4a mennyiségű x_2 inputot használnánk föl, akkor azzal semmivel sem tudnánk növelni azt az outputszintet, amit 3a-nyi x_2 input hozzárendelésével megtermelhetnénk. A rögzített arányú technológia teljesen analóg azzal, amit a fogyasztói eméletben a tökéletes kiegészítő (vagy komplementer) termékek esetében láttunk. Leontief-technológia esetén az inputok között **tökéletes komplementaritás** áll fenn.

15.12 fólia

– **Tökéletes helyettesítő technológia** esetében a termelési eljárások olyanok, hogy az egyik termelési tényezőt a másikkal változatlan arányban tudjuk helyettesíteni. Az izokvantok most pontosan olyanok, mint a fogyasztói elméletben a tökéletes helyettesítés esetében voltak.

15.13 fólia

– A való életben ritkábban fordul elő a tökéletes helyettesítés vagy tökéletes komplementaritás a termelési tényezők között. Gyakrabban találkozunk **erős kiegészítéssel** vagy **erős helyettesítéssel**. Az ilyen technológiák izokvantjai hasonlítanak a tökéletes kiegészítő, illetve tökéletes helyettesítő technológiák izokvantjaira, de lejtésük *folytonosan* csökkenő, és ezért – mint hamarosan látni fogjuk – technikailag jobban kezelhetők.

[8] Wassily Leontief (1906 – 1999) , orosz származású, Nobel-díjas amerikai közgazdász tiszteletére nevezték el így.

15.14 fólia

– **Cobb-Douglas-technológia**: Ha a termelési függvény $y = Ax_1^a x_2^b$ alakú, akkor Cobb-Douglas-típusú termelési függvényről beszélünk. Ez pontosan az a függvény, mint amelyet a Cobb-Douglas-típusú preferenciáknál az első félévben tanulmányoztunk. Mivel a hasznossági függvény konkrét értékének nem volt jelentősége, ezért *A*, *a* és *b* paramétereknek tetszőleges pozitív értéket adhattunk. Cobb-Douglas-típusú *termelési függvény* esetében ez nincs így. Itt jelentősége van a függvényérték nagyságának, s így *A*, *a* és *b* paraméterek értékének is. *A* paraméter méri, hogy mekkora lesz a kibocsátás mértéke, ha mindegyik termelési tényezőből csak egy egységet használunk. Az *a* és *b* paraméterek azt mérik, hogyan változik a kibocsátás, ha az egyes ráfordítások változnak. A Cobb-Douglas-típusú izokvantok ugyanolyan szépen viselkedő felületek, mint a Cobb-Douglas-típusú közömbösségi görbék voltak. A legegyszerűbb példát szolgáltatják a jól viselkedő izokvantokra. A továbbiakban gyakran fogjuk őket szemléltetési célokra használni.

15.7 A termelési függvény diszkutálása

15.15 fólia

– Induljunk ki ismét – az egyszerűség kedvéért – kéttényezős modellből (lásd: 15.15. fólia). Ez azzal az előnnyel jár, hogy állításaink, illetve a újonnan bevezetett fogalmak geometriailag jól szemléltethetők. Az itt következő állítások azonban *n*-tényezős esetben is érvényesek.

– Három szempontból fogjuk a termelési függvényt diszkutálni. Megvizsgáljuk: **1.** milyen hatással van az output volumenére, ha az egyik tényező mennyiségét változtatjuk, miközben a másik tényező értékét rögzítjük (általános esetben: ha egy tényező kivételével az összes többi tényező értékét rögzítjük): $y = f(x_1 \mid x_2 = \tilde{x}_2)$. Megvizsgáljuk **2.** a termelési tényezők felhasználása közti összefüggé-seket abban az esetben, ha az output mennyiségét egy bizonyos szinten rögzítjük: $\tilde{y} = f(x_1, x_2)$. Végül megvizsgáljuk **3.** hogyan érinti az a termelés volumenét (*y*-t), ha a tényezők *arányait* rögzítjük egy bizonyos szinten $(x_2 / x_1 = \tilde{x}_2 / \tilde{x}_1)$, és e rögzített tényezőarányok mellett az inputfelhasználást *t*-szeresére ($t \geq 1$) növeljük: $f(t\tilde{x}_1, t\tilde{x}_2)$.

– Kéttényezős esetet alapul véve – a dolog természetéből adódóan – mindhárom probléma jól ábrázolható grafikusan, hiszen az egyszerűsítések következtében mindhárom esetben csak két dimenziónk marad. A diszkusszió során három fontos új fogalmat fogunk bevezetni: **1.** határtermék; **2.** technikai helyettesítési arány, **3.** mérethozadék.

– **1. Határtermék (MP)**. Milyen hatással van az output volumenére az, ha egyik tényező mennyiségét változtatjuk, miközben a másik tényező értékét rögzítjük (általános esetben: ha egy tényező kivételével az összes többi tényező értékét rögzítjük): $y = f(x_1 \mid x_2 = \tilde{x}_2)$?

15.16 fólia

Az egyik tényező rögzítése nyilvánvalóan kihasít egy "szeletet" a háromdimenziós termelési függvényből. A továbbiakban ezt a "szeletet"fogjuk részletesebben megvizsgálni. Vegyünk egy pontot az x_1 tengelyen (mondjuk: x_1^*-ot), és vizsgáljuk meg, milyen mértékben változik a kibocsátás (y) értéke akkor, ha x_1^* pontban – rögzített $x_2 = \tilde{x}_2$ mellett – x_1 mennyiségét kis mértékben (marginá-lisan) növeljük: Definíció szerint ez nem más, mint az $y = f(x_1 \mid x_2 = \tilde{x}_2)$ függvény x_1^* pontban vett, x_1 szerinti parciális deriváltja. Közgazdaságilag ezt az x_1 termelési tényező határtermékének (**MP** = marginal product) nevezik. x_1 tényező határterméke: $MP_1(x_1^*, \tilde{x}_2) = \partial f(x_1^*, \tilde{x}_2)/\partial x_1$. A másik tényező ($x_2$) határterméke pedig: $MP_2(\tilde{x}_1, x_2^*) = \partial f(\tilde{x}_1, x_2^*)/\partial x_2$.[9] A termelési függvény monotonitása miatt a határtermék pozitív.

A határtermék fogalma nagyon hasonlít a fogyasztói elméletben bevezetett határhaszon fogalmához, de különbözik is tőle. Mivel a kibocsátások – nem úgy, mint a hasznosságok – fizikai jellegűek, ezért elvileg megfigyelhetőek.

Amennyiben a többi (itt az x_2) termelési tényező szintjének ***rögzítésével*** kapott **egyváltozós** $y = f(x_1 \mid x_2 = \tilde{x}_2)$ termelési függvény **konkáv**, akkor az $\boldsymbol{x_1}$ **tényező határterméke csökkenő** lesz. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a határtermék-függvény x_1 szerinti parciális deriváltja negatív: $\partial MP_1(x_1, x_2)/\partial x_1 < 0$; vagy úgy, hogy a termelési függvény x_1 szerinti második parciális deriváltja negatív: $\partial^2 f(x_1, x_2)/\partial x_1^2 < 0$.

15.17 fólia

A legtöbb termelési folyamat közös jellemzője a csökkenő határtermék. Ennek többnyire az az oka, hogy a többi termelési tényező szintjének rögzítése miatt, egy tényező felhasználásának bővítése során *egyre inkább beleütközünk a többi tényező mennyisége által szabott szűk keresztmetszetekbe*. Hozzunk erre gyakorlati példákat a szemináriumon!

– **2. Technikai helyettesítési arány: TRS.** Hogyan jellemezhetjük a termelési tényezők felhasználása közti összefüggéseket, ha az output mennyiségét egy bizonyos szinten rögzítjük: $\tilde{y} = f(x_1, x_2)$?

15.18/1 fólia

Tegyük föl, hogy egy tetszőleges (x_1, x_2) pontban az x_1 termelési tényezőből egy kis mennyiséggel kevesebbet használunk fel. Mennyivel kell x_2 tényezőből többet felhasználnunk ahhoz, hogy továbbra is $\tilde{y}$ outputot állítsunk elő? Mennyi legyen a dx_2 többletráfordítás, ha x_1-ből dx_1 a kieső mennyiség? Ez éppen annyi, mint az izokvant meredeksége, melyet **technikai helyettesítési aránynak** (vagy technikai helyettesítési határaránynak) nevezünk (**TRS** = technical rate of substitution): dx_2/dx_1, A technikai helyettesítési arány megadja, milyen arányban kell a vállalatnak az egyik termelési tényezőt a másikkal helyettesítenie ahhoz, hogy a kibocsátás változatlan maradjon.

15.18/2 fólia

[9] A képletekben a *változó tényezőhöz rendelt csillag* azt hivatott jelezni, hogy a határtermék értéke az illető tényező különböző alkalmazási szintjein más és más lehet.

A TRS meghatározásához hasonló eljárást alkalmazunk, mint a közömbösségi görbe meredekségét kifejező helyettesítési határarány (MRS) meghatározásához: rögzítjük a kibocsátást, és a termelési függvényt teljesen differenciáljuk x_1 és x_2 szerint. Azonos átalakítások után megkapjuk a technikai helyettesítés arányát, mint a **megfelelő határtermékek arányának** mínusz egyszeresét. TRS értéke természetesen függ attól, hogy az izokvant mely pontjában mérjük.

15.19 fólia

Jól viselkedő termelési függvények izokvantjai esetében **a technikai helyettesítési arány csökkenő**: ha növeljük az egyik termelési tényező értékét, és a másik termelési tényező mennyiségét úgy alakítjuk, hogy ugyanazon az izokvanton maradjunk, akkor a technikai helyettesítési arány egyre kisebb lesz.

– **3. Mérethozadék.** Hogyan érinti az a termelés volumenét (y-t), ha a tényezők *arányait* rögzítjük egy bizonyos szinten $(x_2/x_1 = \tilde{x}_2/\tilde{x}_1)$, és e rögzített tényezőarányok mellett az inputfelhasználást t-szeresére ($t \geq 1$) növeljük: $f(t\tilde{x}_1, t\tilde{x}_2)$? Legyen mondjuk ez a rögzített arány: az $x_2/x_1 = 2/4$! Mi történik akkor, ha e rögzített arányban felhasznált termelési tényezők kétszeresét, háromszorosát, négyszeresét (általánosan: t-szeresét, $t \geq 1$) alkalmazzuk? Hogyan érinti ez a kibocsátást? Az output nyilván nőni fog. Nem közömbös azonban, hogy milyen mértékben: t-nél nagyobb, kisebb, vagy t-vel azonos mértékben?

15.20 fólia

A problémát igen egyszerűen ábrázolhatjuk úgy, hogy a rögzített tényezőfelhasználás pontjához egy origóból kiinduló sugarat húzunk, és az azonos tényezőarány melletti t-szeres tényezőfelhasználás-növekedést e sugáron való elmozdulásként fogjuk fel. A 15.20 ábra alján szereplő g skálafüggvény egyszerűen ábrázolja ezt: ha adott tényezőarány mellett t-szeresére növeljük az inputfelhasználást, hányszorosára nő az output? Három eset lehetséges:

15.21 fólia

t*-nél *nagyobb mértékben nő az output. Ilyenkor **növekvő mérethozadékról** beszélünk. $t > 1$ esetén: $f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2)$.

15.22 fólia

t*-nél *kisebb mértékben nő az output. Ilyenkor **csökkenő mérethozadékról** beszélünk. $t > 1$ esetén: $f(tx_1, tx_2) < tf(x_1, x_2)$.

15.23 fólia

t*-vel *azonos mértékben nő az output. Ilyenkor **állandó mérethozadékról** beszélünk: $f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2)$.

Milyen technológiai példát hozhatunk a *növekvő* mérethozadékra? Jellemző példa erre az kőolajvezeték. Ha megkétszerezzük a vezeték átmérőjét, kétszer annyi anyagot használunk fel, de a vezeték keresztmetszete a négyszeresére nő, s ezáltal a korábbi szállított mennyiségnek több mint kétszeresét tudjuk a megnövelt átmérőjű vezetéken szállítani.

Egy ennél általánosabb érvényű példa a növekvő mérethozadékra az, amikor egy vállalat méretének növelésével a korábbinál nagyobb tér nyílik a dolgozók és a vezetők számára a specializációra, melynek következtében az inputfelhasználás növekedésénél gyorsabb ütemben nő az output.

15.24 fólia

Egy konkrét technológiánál a különböző termelési szinteken különböző mérethozadékok jelenhetnek meg. Megtörténhet, hogy a termelés alacsony szintjén a technológia növekvő mérethozadékot eredményez (például a **specializáció előnyeinek** kihasználása révén), később (a kibocsátás magasabb szintjein) a *t* ráfordításnövekedési tényező már csak ugyanolyan, vagy *t*-nél alacsonyabb szintű hozamnövekedést eredményez (állandó, illetve csökkenő mérethozadék). E jelenség oka gyakran az, hogy a vállalati méretek növekedésével a vállalat egységei közötti **koordináció költségei** is növekednek.

Kis méreteknél (alacsony *t* értéknél), a méretnövekedésből (*t* ráfordításnövekedésből) következően a növekvő specializációval járó előnyök nagyobbak a koordinációs költségek emelkedésével járó hátrányoknál, s ezért a mérethozadék növekvő. A vállalat méretének növekedése azonban elérhet egy olyan (magas *t* értékkel jellemezhető) szintre, ahol az előbbi összefüggés iránya megfordul: ahol a koordináció költségei már meghaladják a specializáció előnyeit, s így a méretnövekedés csökkenő mérethozadékkal jár.

15.8 Homogén és homotetikus termelési függvények

15.25 fólia

– A homogén és homotetikus függvények különösen alkalmas megjelenítői a különböző technológiák hozadéki viszonyainak. A közgazdászok ezért előszeretettel alkalmazzák őket. **Homogén függvényekről** esett már szó az első félévben, ezért itt most csak röviden elevenítjük föl korábbi (már az előző félévi matek során is tanult) ismereteinket. Lásd 15.25. fólia. (*k*-ad fokban pozitív homogén függvényekre igaz az **Euler-tétel**, melyet – termelési függvényekkel dolgozva – megint csak gyakran használnak a közgazdászok.)

15.26 fólia

– Egy elsőfokú pozitív homogén (állandó mérethozadékú) termelési függvény izokvantjai a 15.26. fólián látható módon néznek ki. Miért? Hogyan néznének ki a csökkenő vagy a növekvő mérethozadékú (hányadfokú?) homogén termelési függvény izokvantjai?[10]

15.27 fólia

– A Cobb-Douglas-féle termelési függvény lehetséges hozadéki viszonyai könnyen megmutathatók, ha észrevesszük, hogy a szóban forgó függvény *k*-ad fokban pozitív homogén függvény.

[10] Miért van szüksége a közgazdásznak a mérethozadéki viszonyok jellemzésére homogén (vagy homotetikus) függvényekre? Vajon minden lehetséges termelési függvény esetében megállapítható-e a mérethozadék?

15.28 fólia

– Végül bevezetünk még egy új fogalmat: a **homotetikus függvények** fogalmát. Egy függvény – definíció szerint – akkor homotetikus, ha nem más, mint egy elsőfokú pozitív homogén függvény pozitív transzformáltja.

15.29 fólia

– Egy homotetikus termelési függvény abban különbözik egy elsőfokú homogén termelési függvénytől, hogy izokvantjaihoz az inputfelhasználás növekedésével nem feltétlenül arányosan növekvő outputszint tartozik.

– A homogén és homotetikus termelési függvényeknek van egy igen fontos tulajdonsága: izokvantjaik **sugarasan párhuzamosak**. Ez azt jelenti, hogy – például a 15.29. fólián látható függvényeket alapul véve – amennyiben megsokszorozzuk az azonos tényező-arányhoz tartozó inputfelhasználást, akkor *egy adott sugáron mozogva*, az egyre magasabb szintű izokvantokhoz tartozó *érintők is párhuzamosak* lesznek egymással. E fontos tulajdonságnak a következő előadások során még hasznát vesszük.

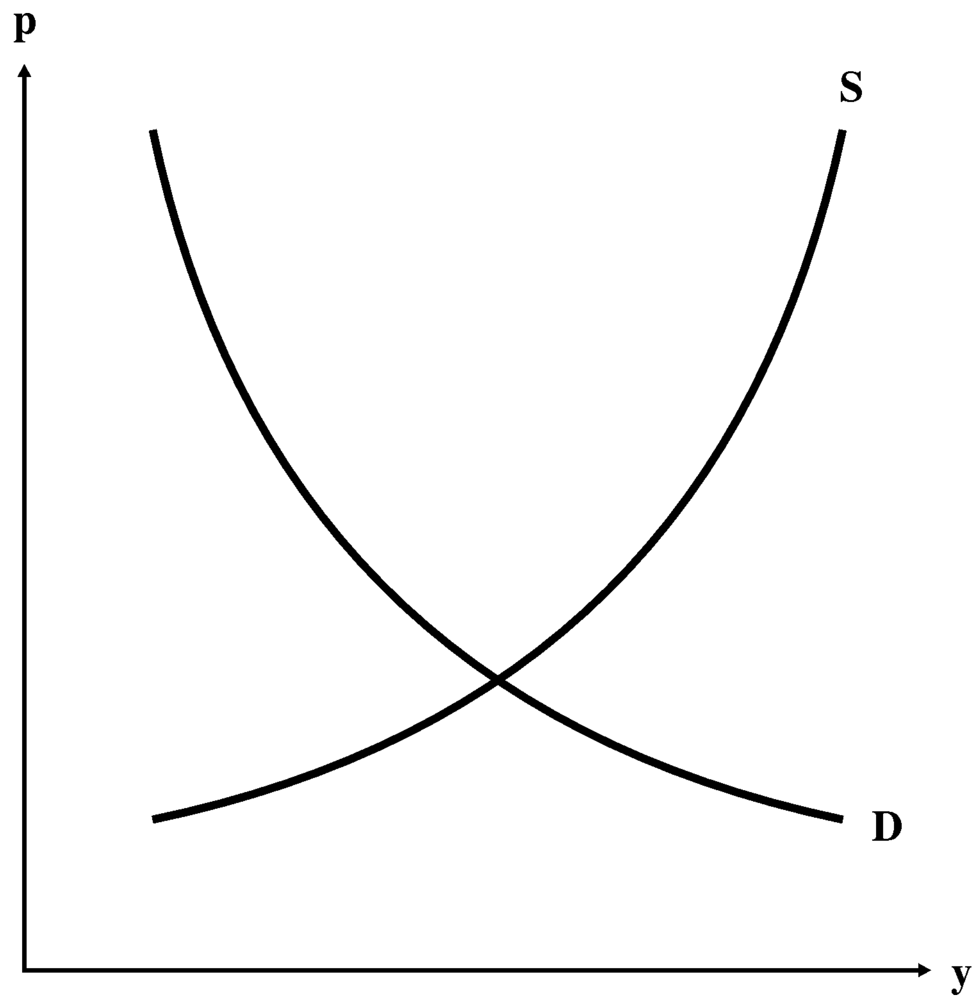
15. előadás

TECHNOLÓGIA

MELLÉKLET

Kertesi Gábor – Világi Balázs

15.1
Piaci egyensúly



15.2
Ráfordítás és kibocsátás

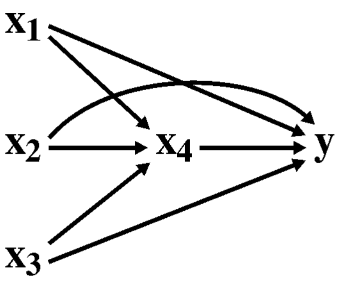
$$
\begin{array}{ccc}
\textbf{Ráfordítás} & & \textbf{Kibocsátás} \\
\left.\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{array}\right\} & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_k \end{array}\right.
\end{array}
$$

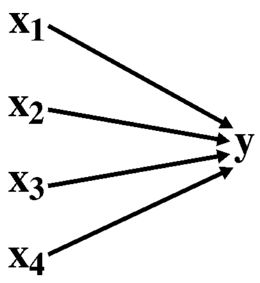
15.3
Termelési lehetőségek halmaza

Ráfordítás-kombináció	Ráfordítások (inputok)			Kibocsátás (output)
	Munka x_1 $\left(\frac{\text{munkaóra}}{\text{nap}}\right)$	Tőke = géphasználat x_2 $\left(\frac{\text{óra}}{\text{nap}}\right)$	Anyagfelhasználás x_3 $\left(\frac{\text{kg}}{\text{nap}}\right)$	y $\left(\frac{\text{db}}{\text{nap}}\right)$
A	**100**	**100**	**100**	**1000**
B	**25**	**400**	**400**	**1000**
C	**200**	**200**	**200**	**2000**
D	**300**	**300**	**300**	**3000**
E	**400**	**400**	**400**	**4000**
F	**94,5**	**94,5**	**118**	**1000**
G	**284**	**284**	**355**	**3000**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Termelési függvény: $y = 10 \cdot x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/4} \cdot x_3^{1/4}$

15.4
Az autógyártás különböző technológiai alternatívái





$y = f(x_1, x_2, x_3)$ $\qquad$ $y = g(x_1, x_2, x_3, x_4)$

y = autó
x_1 = munka
x_2 = gépek, épületek
x_3 = anyagok
x_4 = részegységek (pl. sebváltó, kuplung)

15.5
A ráfordítás és a kibocsátás mennyisége és ára (mértékegységek)

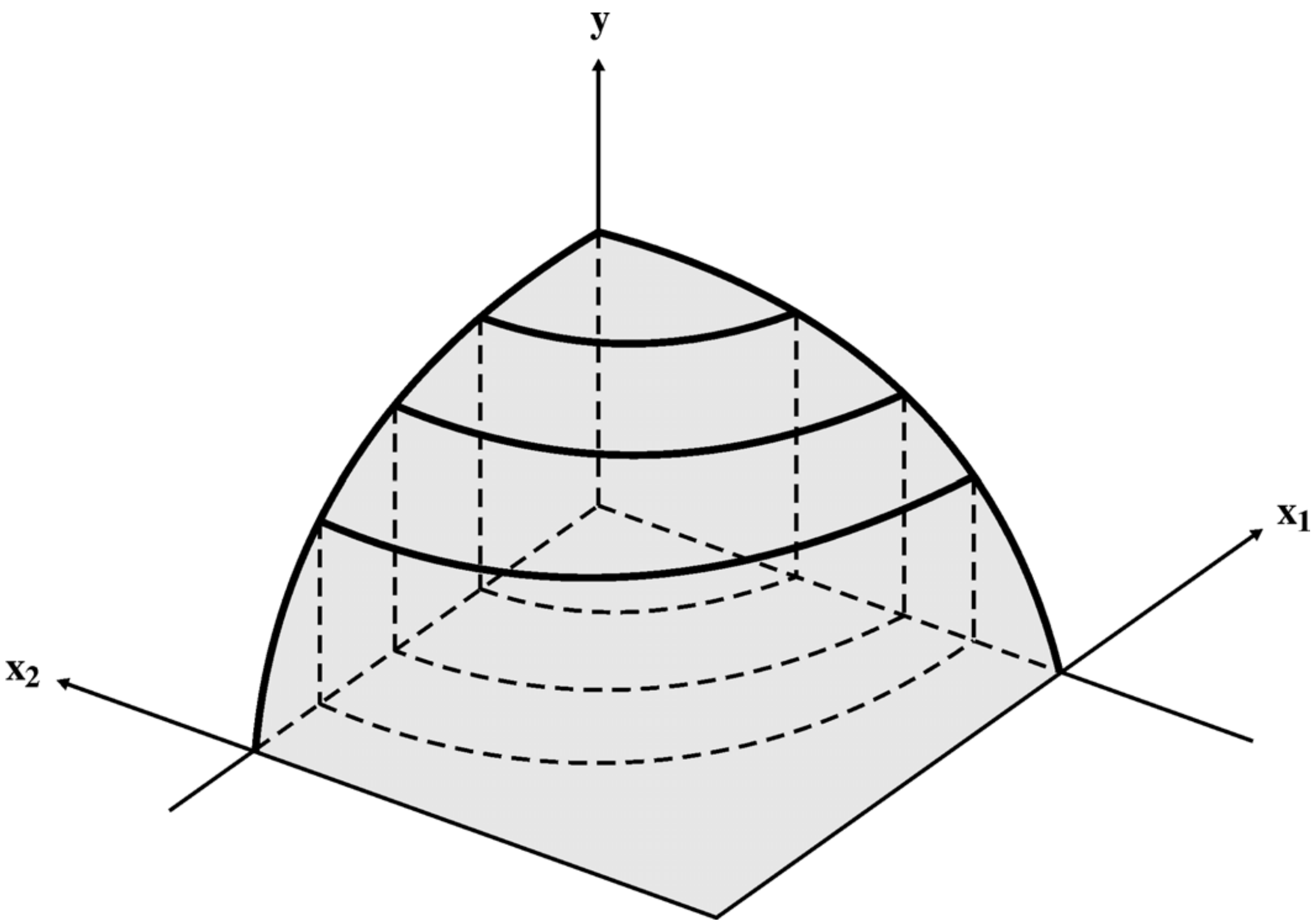
Megnevezés	Ráfordítások			Kibocsátás
	Munka	Tőke	Anyag	
Mennyiségek	$x_1 \quad \frac{\text{munkaóra}}{\text{nap}}$	$x_2 \quad \frac{\text{gépóra}}{\text{nap}}$	$x_3 \quad \frac{\text{kg}}{\text{nap}}$	$y \quad \frac{\text{db}}{\text{nap}}$
Árak	$w_1 \quad \frac{\$}{\text{munkaóra}}$	$w_2 \quad \frac{\$}{\text{gépóra}}$	$w_3 \quad \frac{\$}{\text{kg}}$	$p \quad \frac{\$}{\text{db}}$
Értékek (költség ill. Bevétel)	$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3$ $\frac{\text{munkaóra}}{\text{nap}} \frac{\$}{\text{munkaóra}} + \frac{\text{gépóra}}{\text{nap}} \frac{\$}{\text{gépóra}} + \frac{\text{kg}}{\text{nap}} \frac{\$}{\text{kg}}$ Költség (\$/nap)			py $\frac{\text{db}}{\text{nap}} \frac{\$}{\text{db}}$ Bevétel (\$/nap)

15.6
A tőke költségének mérése

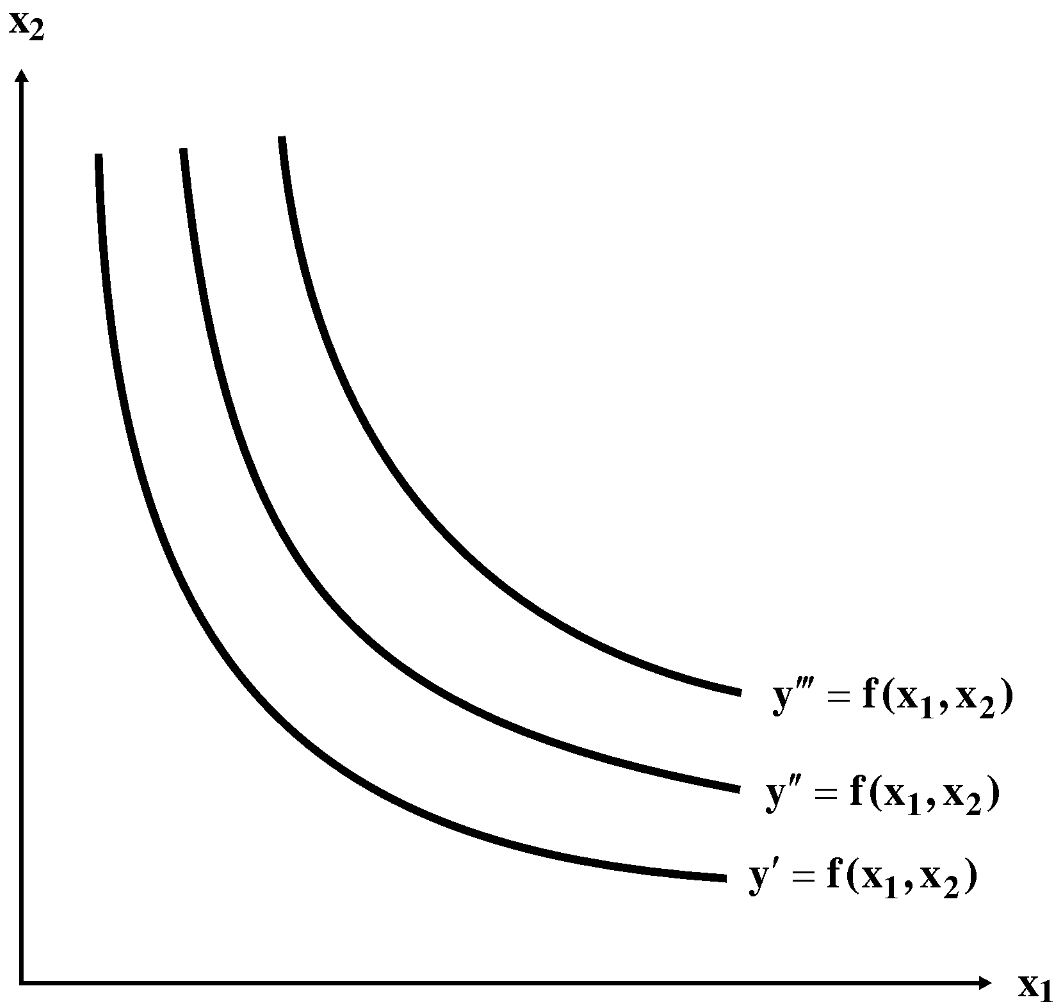
Állomány-szemlélet (Stock)		
Mennyiség x_1	Ár w_1	A tőke költsége $w_1 x_1$
1 millió $ értékű tőkejószág	$10 \frac{\%}{\text{év}}$ kamat	$1.000.000\ \$ \cdot \frac{0,1}{\text{év}}$ $100.000 \frac{\$}{\text{év}}$
Folyam-szemlélet (Flow)		
Mennyiség x_1'	Ár w_1'	A tőke költsége $w_1' x_1'$
$20.000 \frac{\text{óra}}{\text{év}}$ géphasználat	$w_1' = ?$	$w_1 x_1 = w_1' x_1'$ $= 100.000 \frac{\$}{\text{év}}$

$$w_1' = \frac{w_1 x_1}{x_1'} = \frac{100.000 \frac{\$}{\text{év}}}{20.000 \frac{\text{gépóra}}{\text{év}}} = 5 \frac{\$}{\text{év}}$$

15.7
Az $y = f(x_1,x_2)$ termelési függvény



15.8
Izokvantok (egyenlőtermék-görbék)

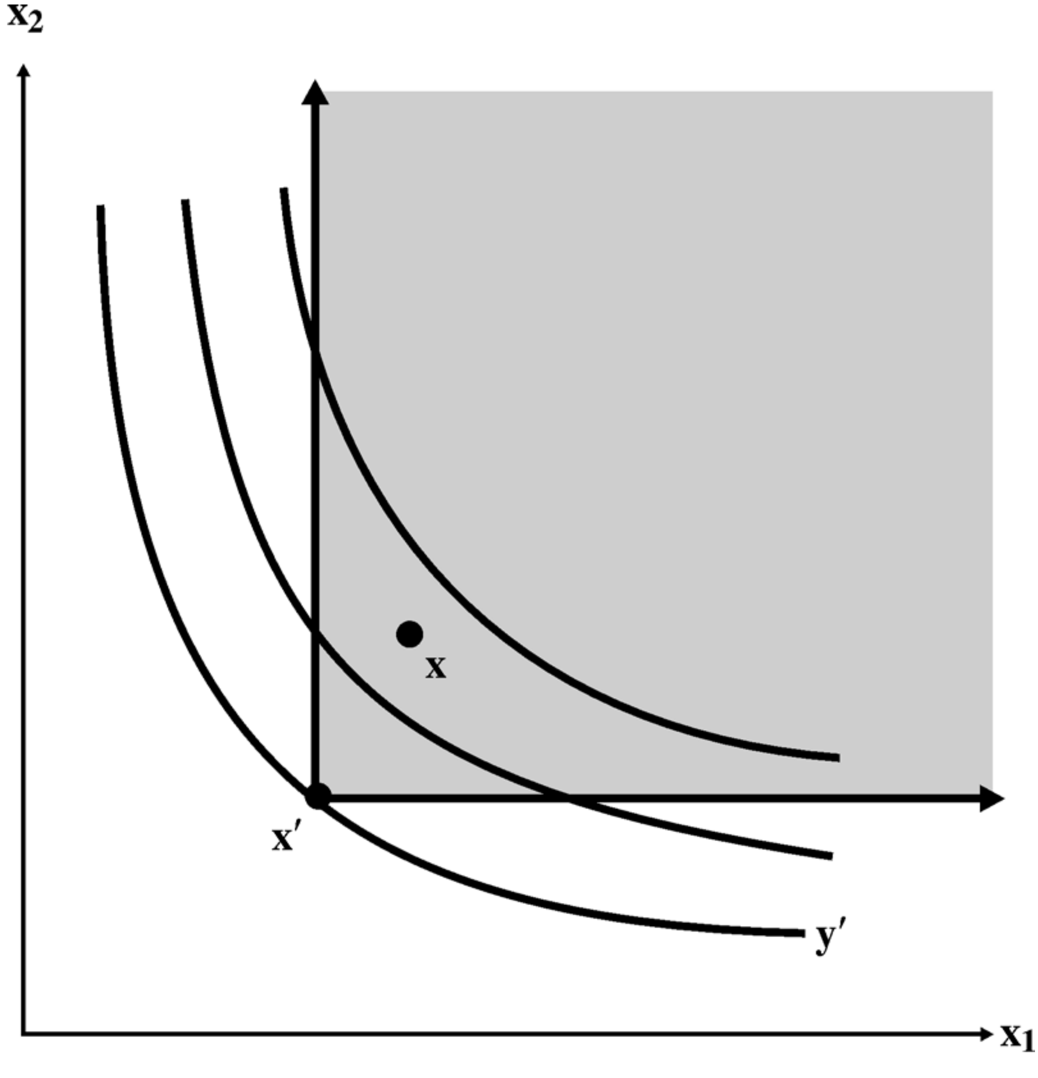


$y''' > y'' > y'$ és

$y'''-y''$, $y''-y'$... stb. távolságoknak

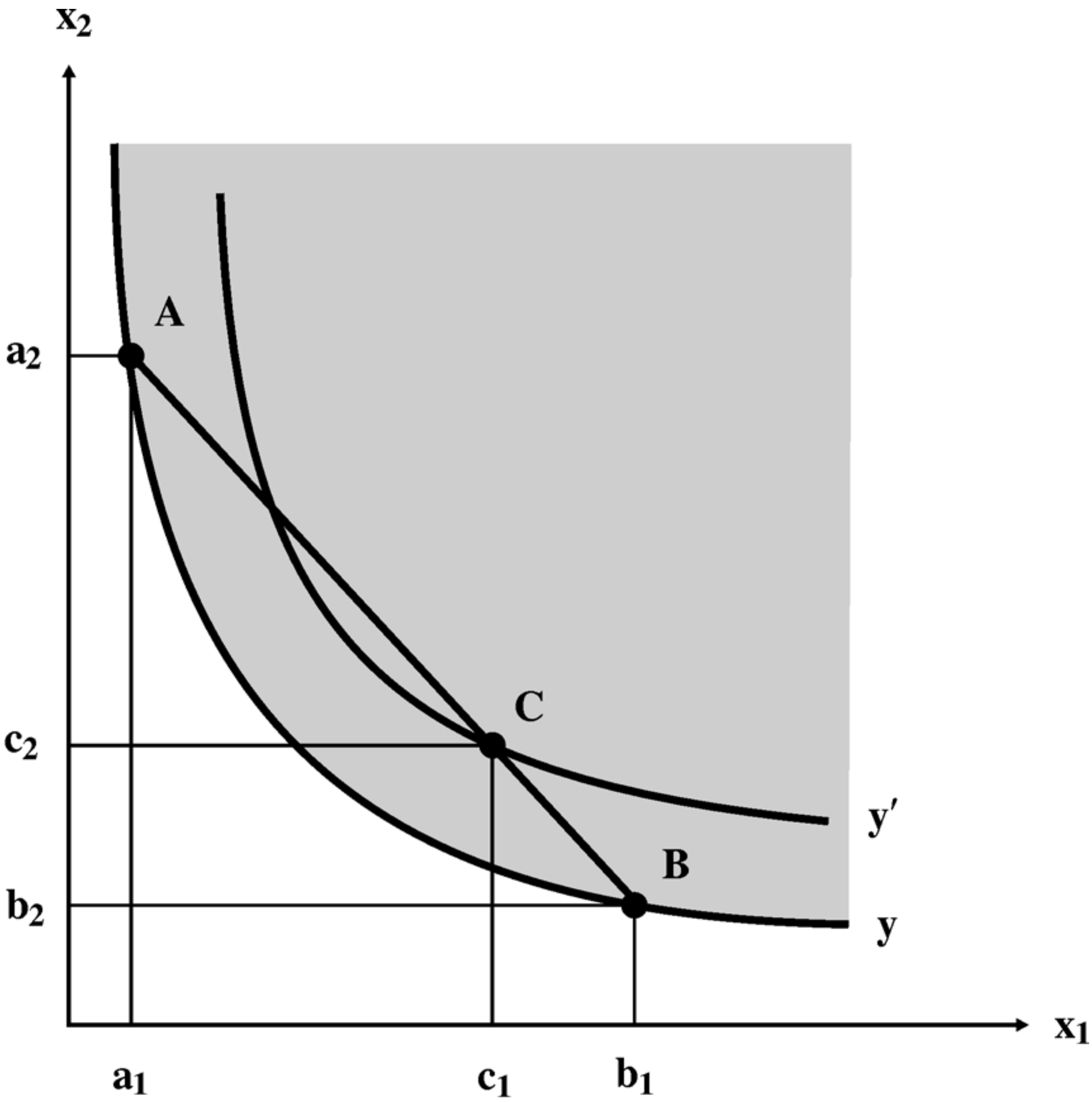
***van* közgazdasági jelentése**

15.9
A technológiák monotonitása



$$\text{Ha} \quad x' \le x \quad \Rightarrow \quad y' \le y = f(x)$$
$$x = (x_1, x_2)$$

15.10
A technológiák konvexitása



Konvex technológia esetén:

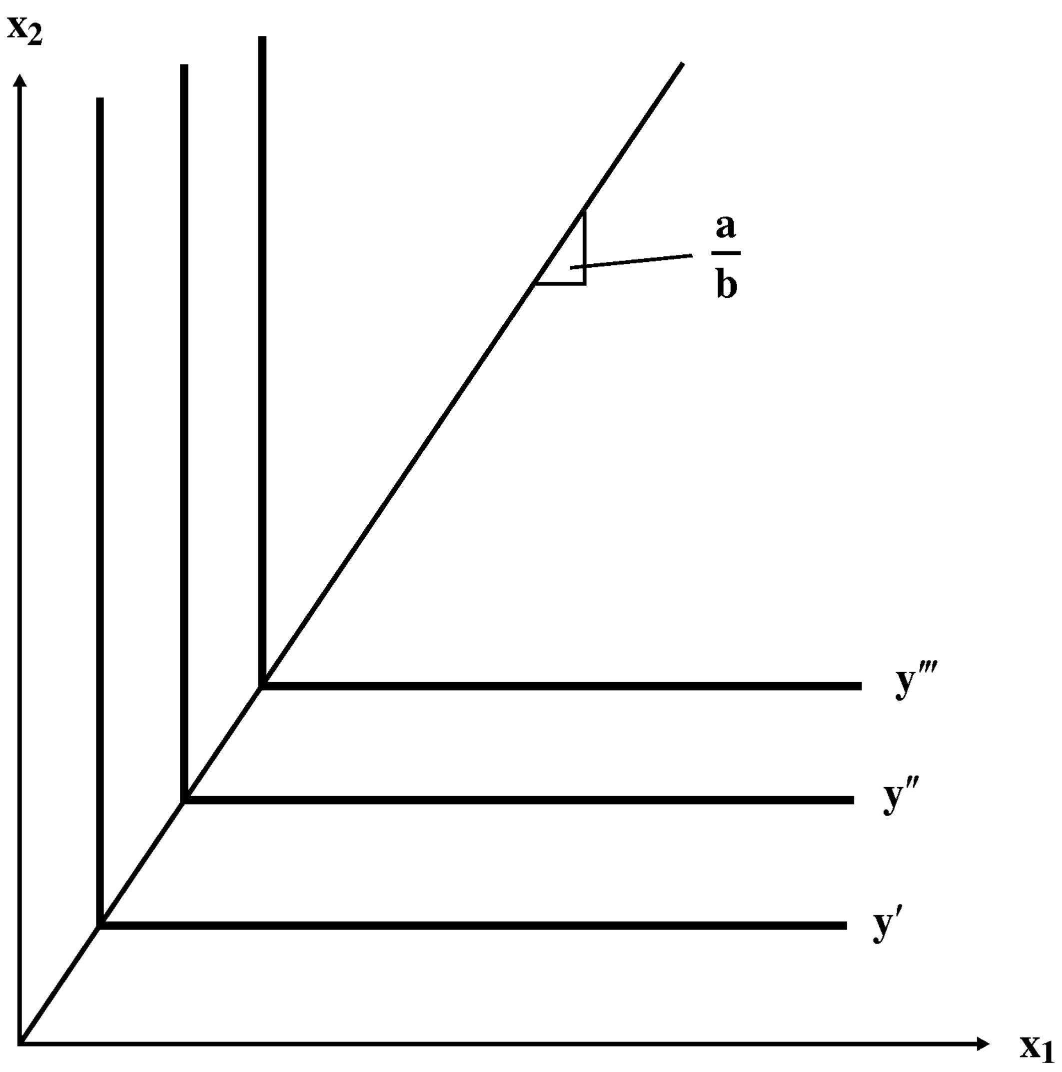
ha: $f(a_1, a_2) = f(b_1, b_2) = y$

akkor:

$$y \leq y' = f(\alpha a_1 + (1-\alpha) b_1, \alpha a_2 + (1-\alpha) b_2)$$
$$= f(c_1, c_2)$$

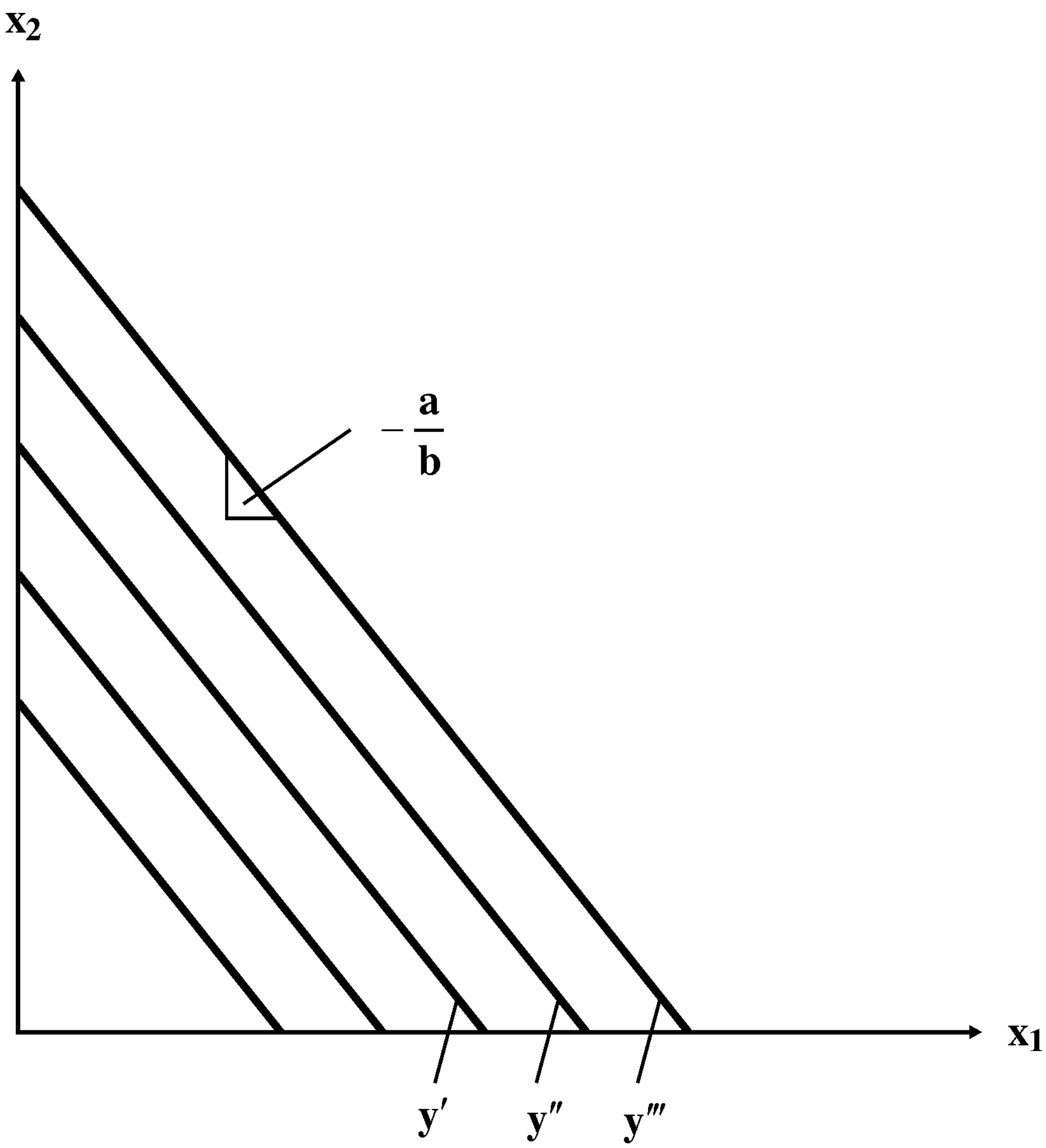
$$(0 < \alpha < 1)$$

15.11
Rögzített arányú (Leontief-féle) technológia izokvantjai



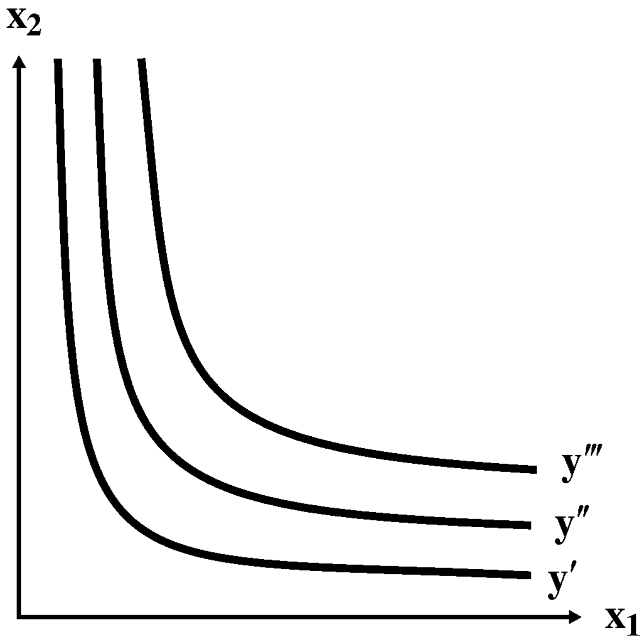
$$y = \min\{ax_1, bx_2\}$$

15.12
Tökéletes helyettesítő technológia izokvantjai

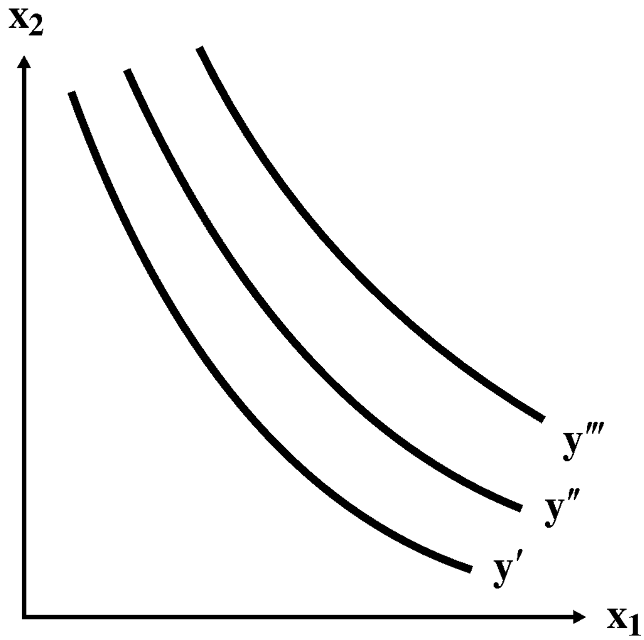


$$y = ax_1 + bx_2$$

15.13
Erős kiegészítő, illetve erős helyettesítő termelési tényezők



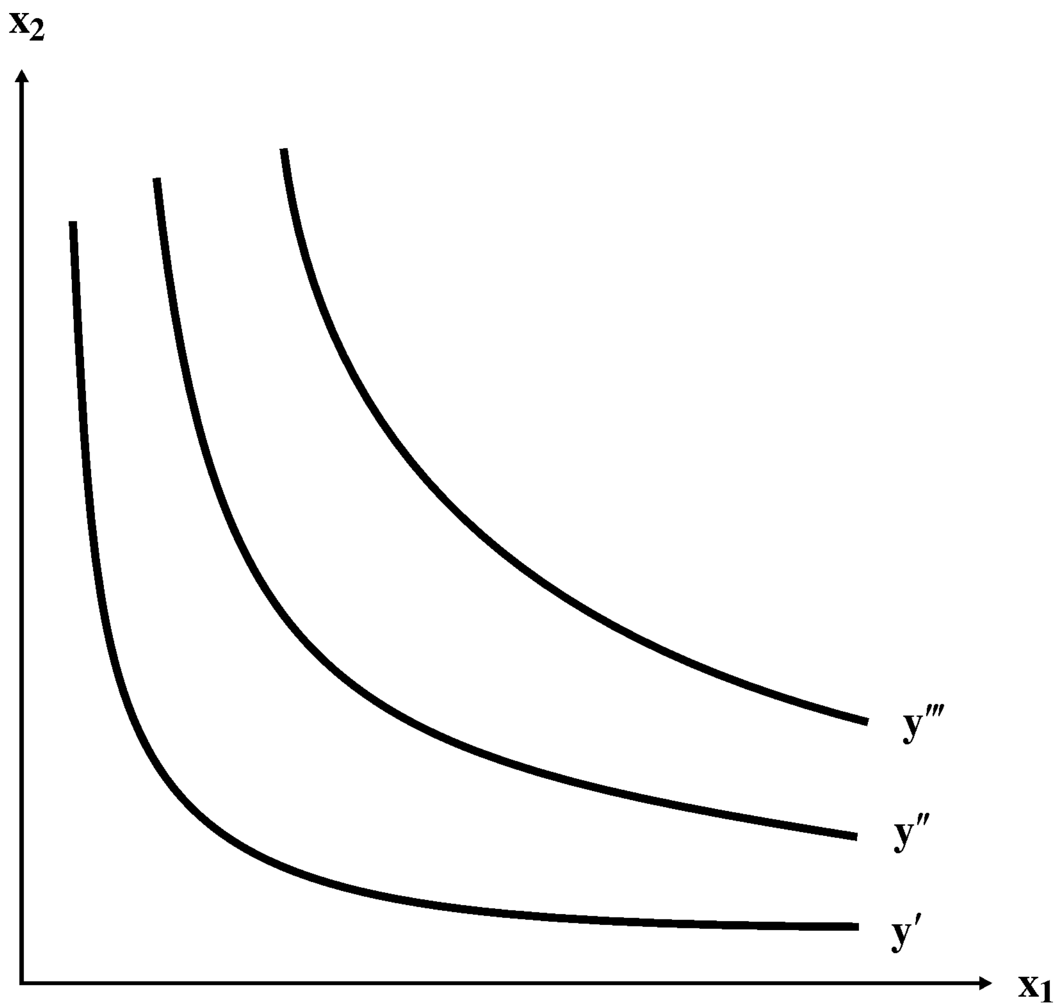
Erős kiegészítő tényezők



Erős helyettesítő tényezők

$$y = f(x_1, x_2)$$

15.14
Cobb–Douglas technológia

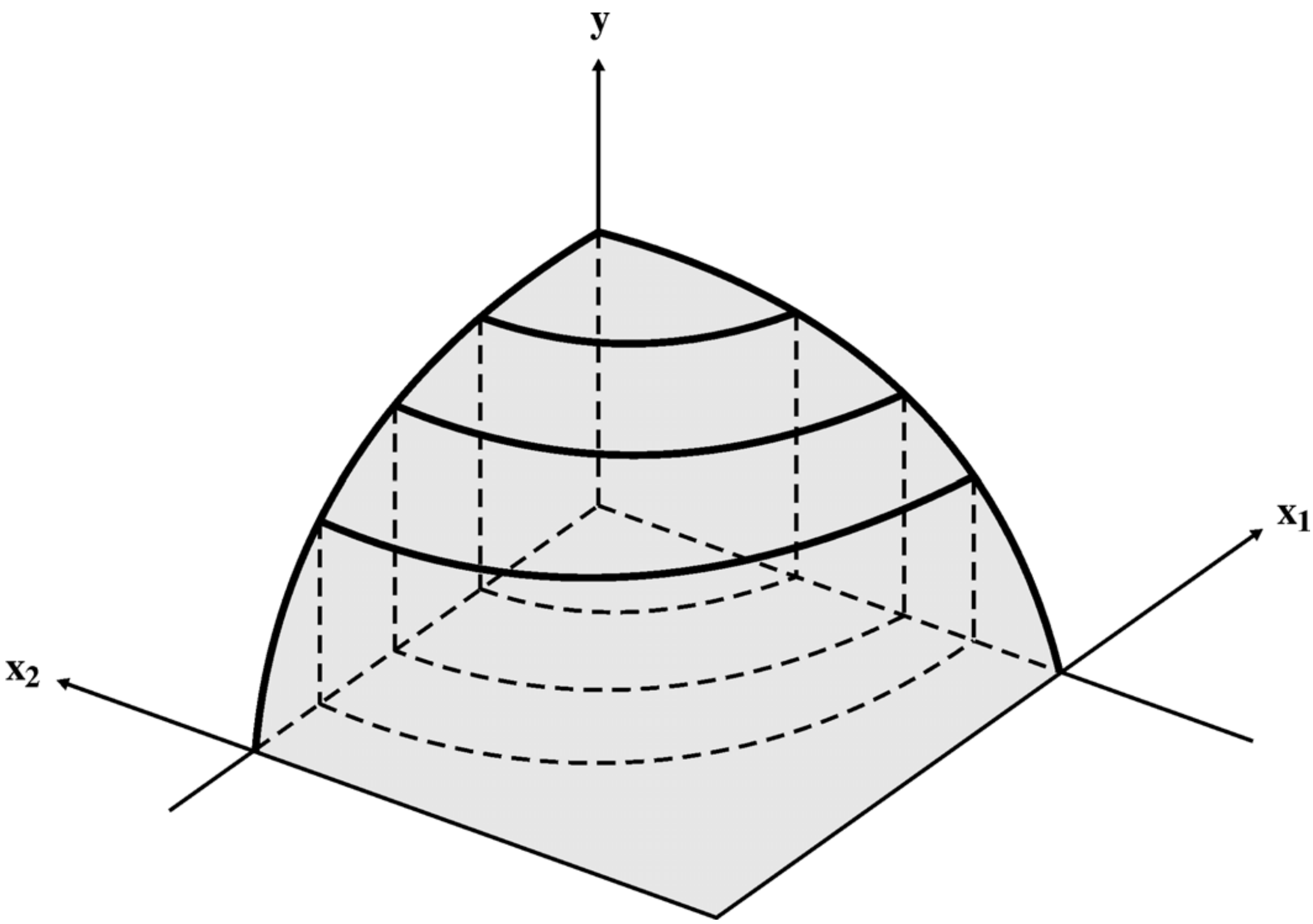


$$y = Ax_1^a \cdot x_2^b \quad , \qquad A > 0$$

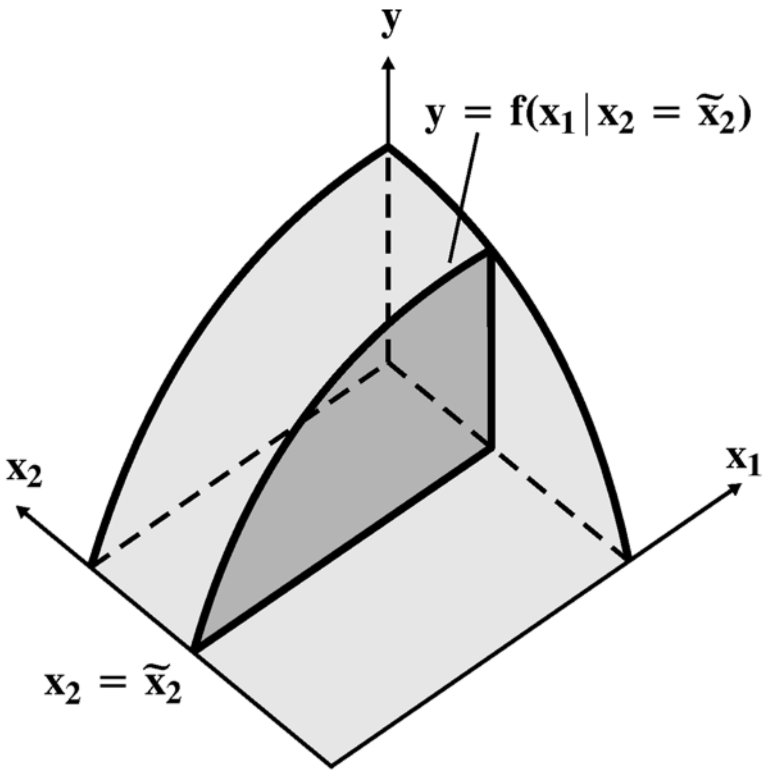
Speciális eset:

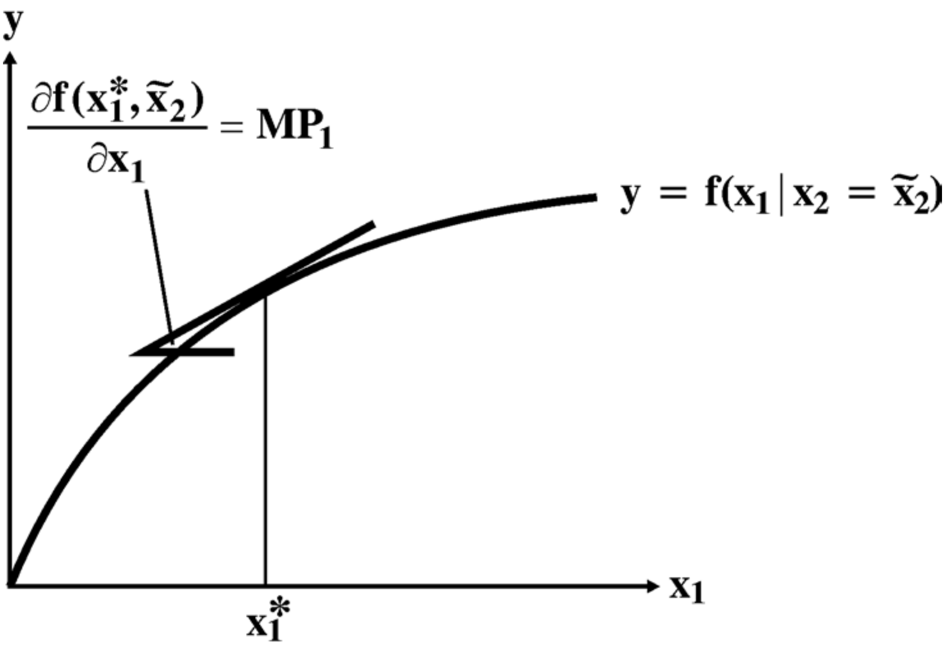
$$y = A \cdot x_1^a \cdot x_2^{1-a} \quad , \qquad 0 < a < 1$$

15.15
$y = f(x_1,x_2)$ termelési függvény



15.16
Határtermék

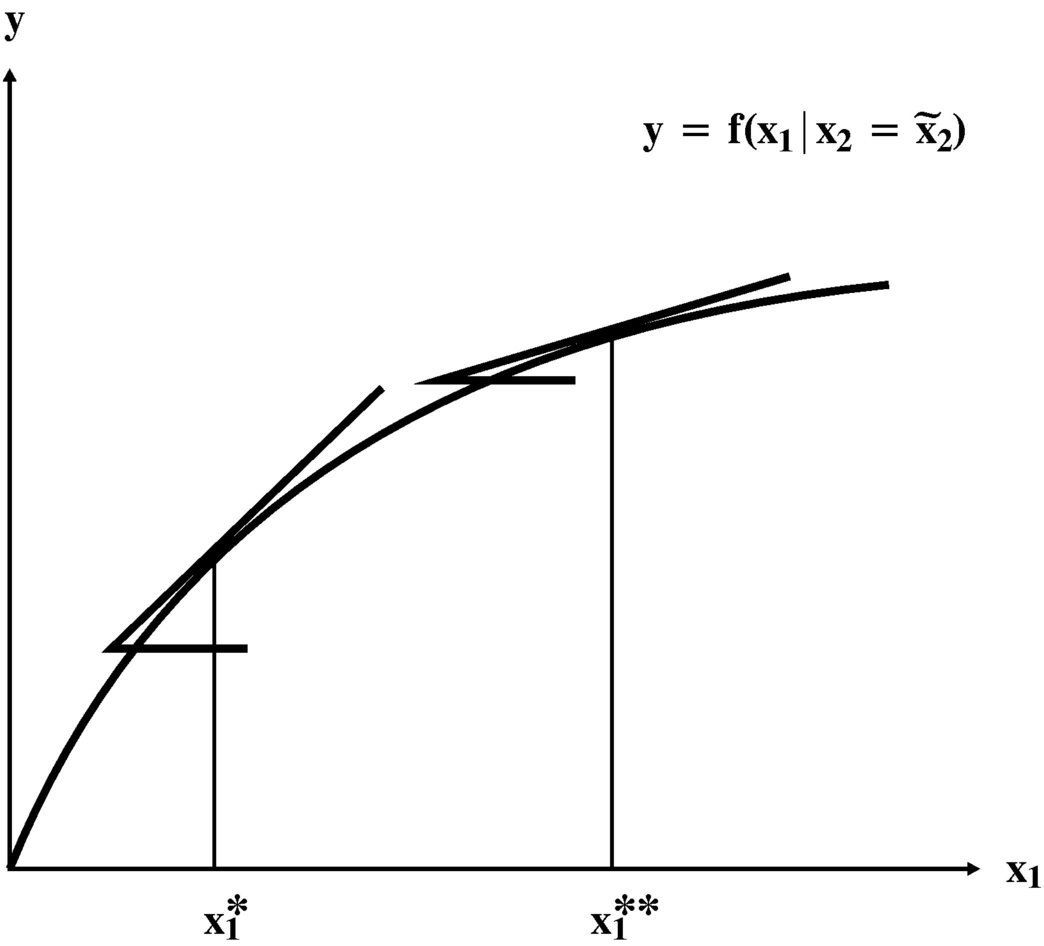




$$MP_1(x_1^*, \tilde{x}_2) = \frac{\partial f(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1}$$

$$MP_2(\tilde{x}_1, x_2^*) = \frac{\partial f(\tilde{x}_1, x_2^*)}{\partial x_2}$$

15.17
Csökkenő határtermék



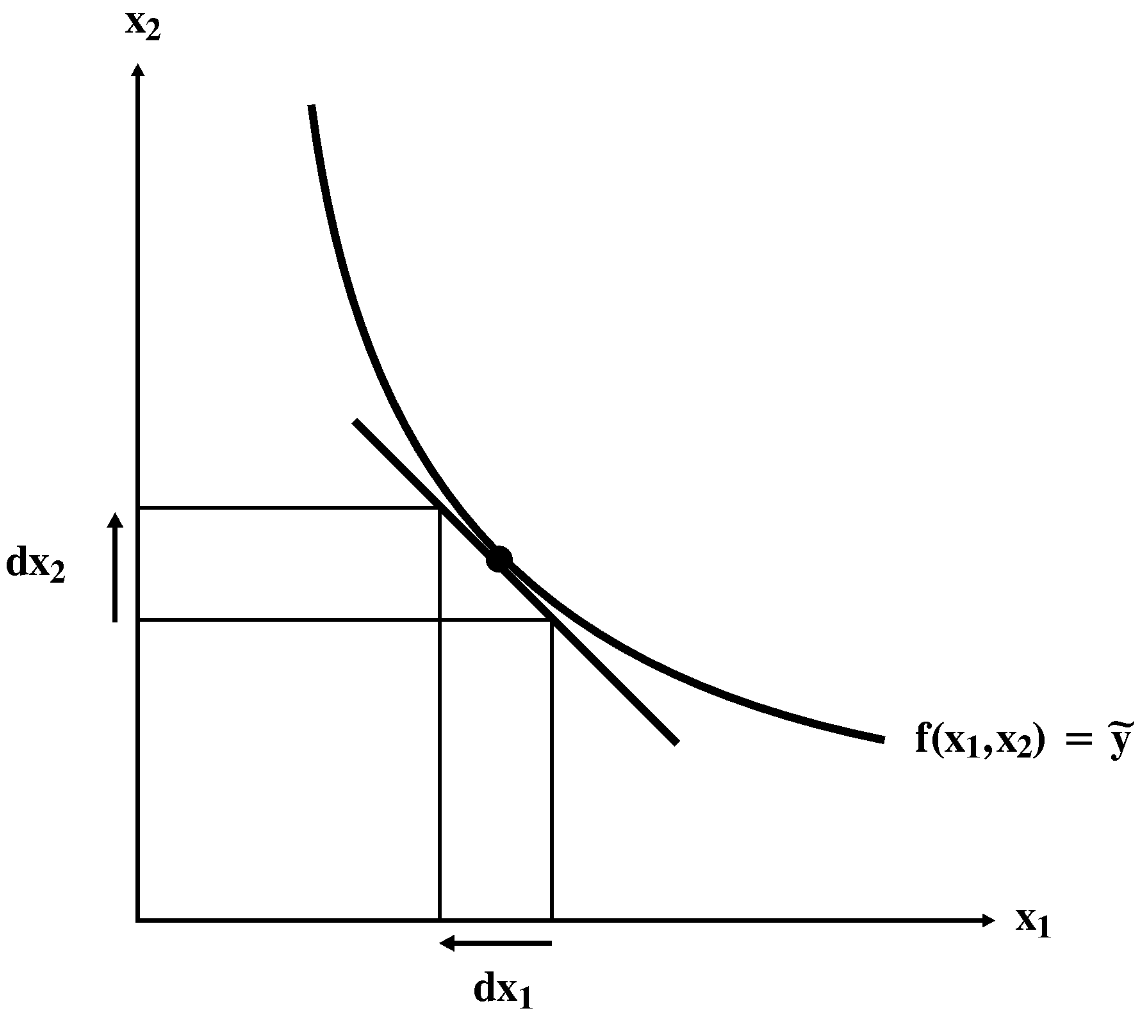
Konkáv $y = f(x_1 | x_2 = \tilde{x}_2)$ esetén:

$$\text{Ha } x_1^{**} > x_1^*, \text{ akkor: } \frac{\partial f(x_1^*, \tilde{x}_2)}{\partial x_1} > \frac{\partial f(x_1^{**}, \tilde{x}_2)}{\partial x_1}$$

$$MP_1(x_1, \tilde{x}_2) = \frac{\partial f(x_1, \tilde{x}_2)}{\partial x_1} \text{ függvény}$$

x_1-ben csökkenő

15.18/1
Technikai helyettesítési arány
(TRS)



$$TRS = \frac{dx_2}{dx_1}$$

15.18/2
Technikai helyettesítési arány
(TRS)

$$f(x_1, x_2) = y$$

Rögzítsük y-t és differenciáljuk teljesen!

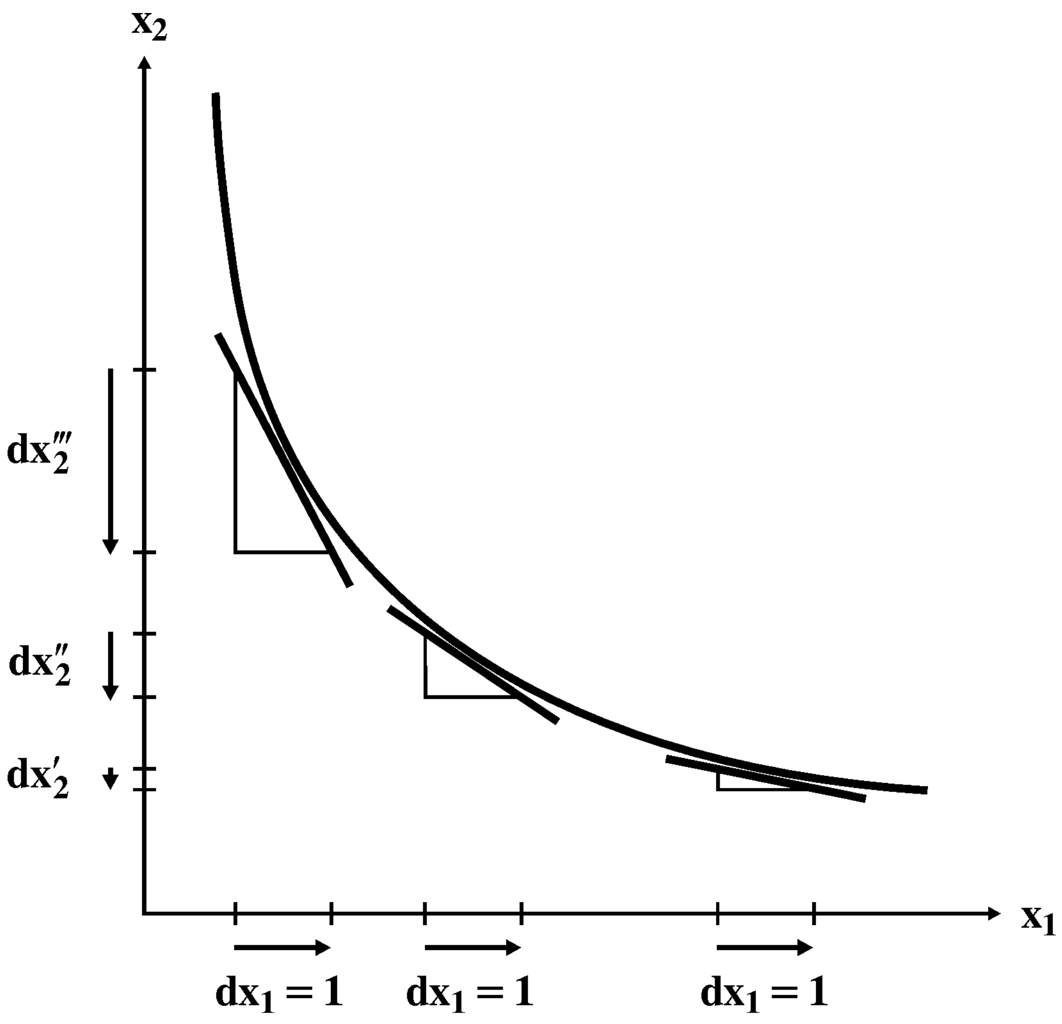
$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = dy = 0$$

Átrendezve:

$$TRS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}$$

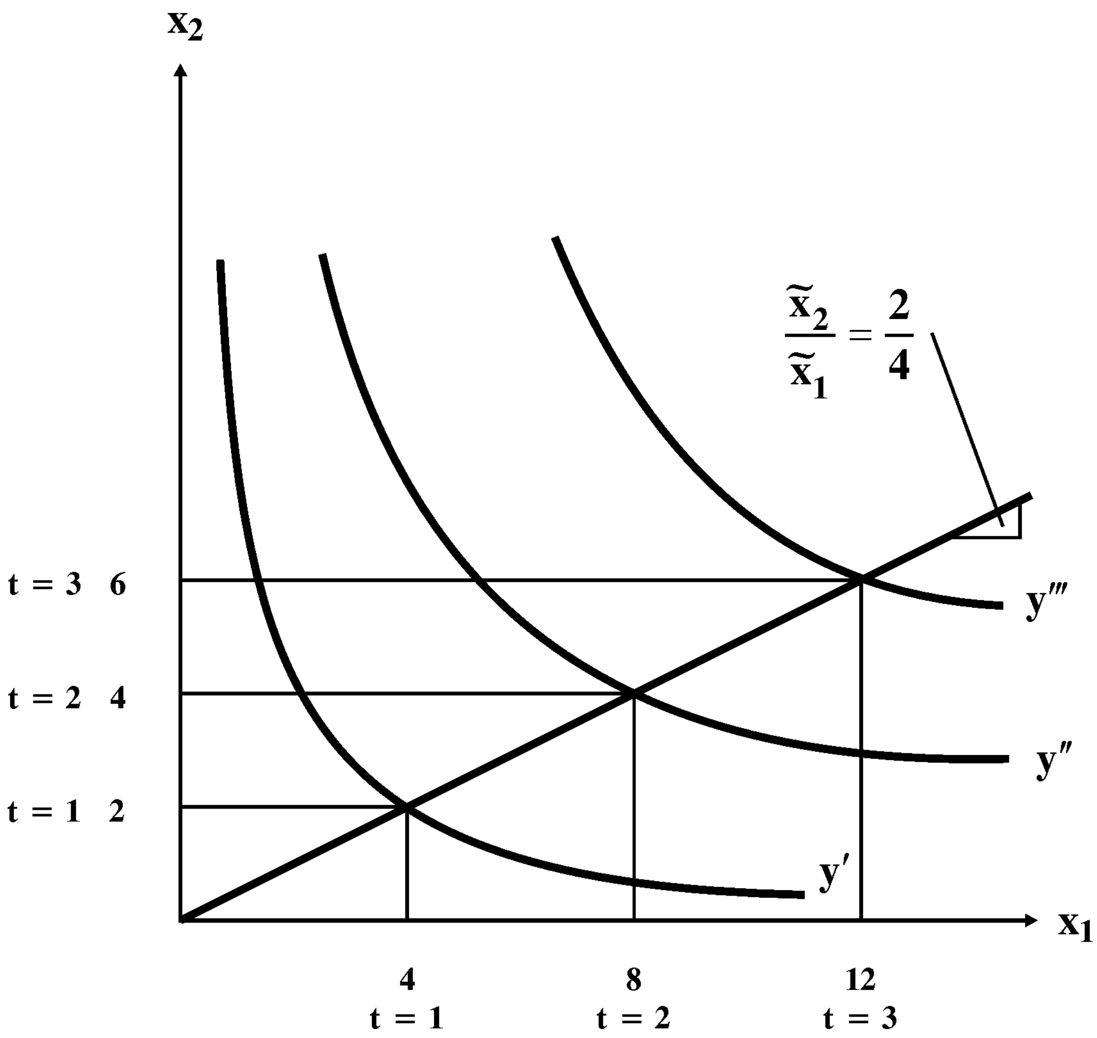
$$= -\frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)}$$

15.19
Csökkenő technikai helyettesítési arány



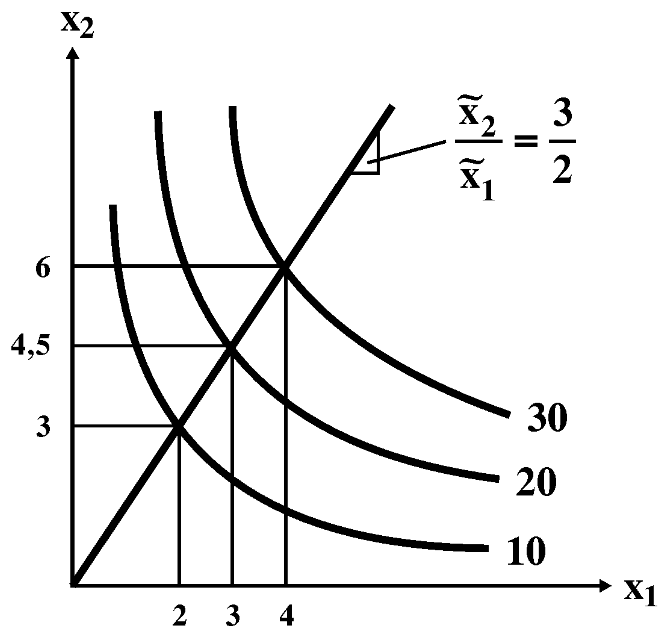
$$\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right) \text{ csökkenő}$$

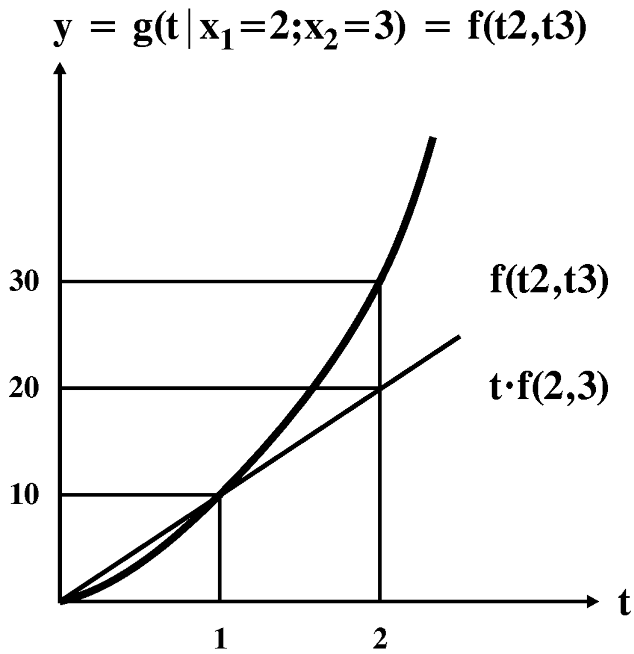
15.20
Skálafüggvény



skálafüggvény: $y = g(t \mid x_1 = \tilde{x}_1,\ x_2 = \tilde{x}_2)$
$= f(t\tilde{x}_1, t\tilde{x}_2)$

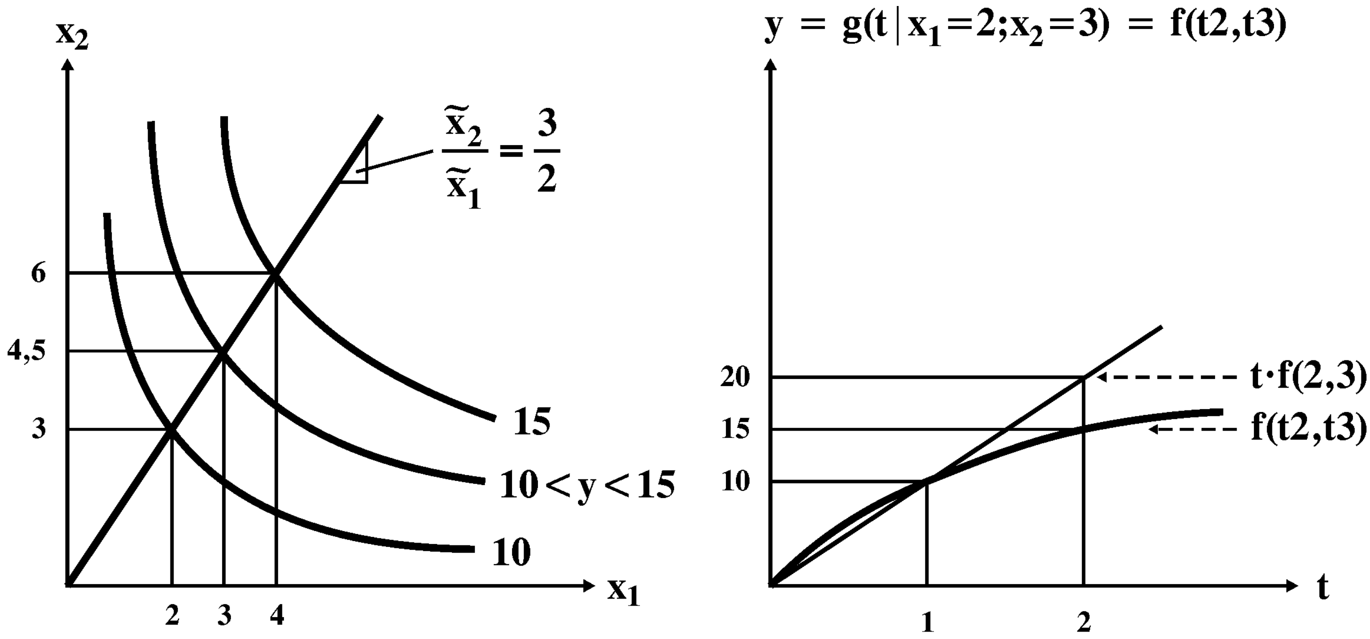
15.21
Növekvő mérethozadék





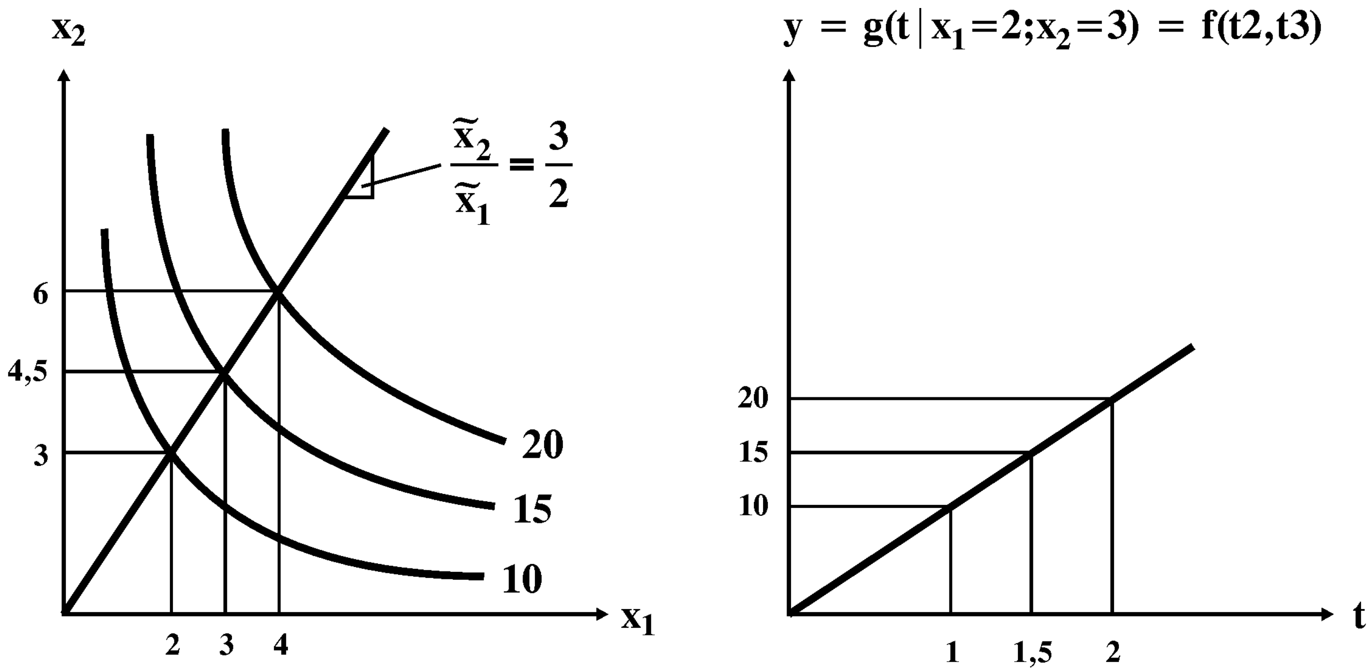
$$f(tx_1,tx_2) > t\cdot f(x_1,x_2) \quad ; \quad t > 1$$

15.22
Csökkenő mérethozadék



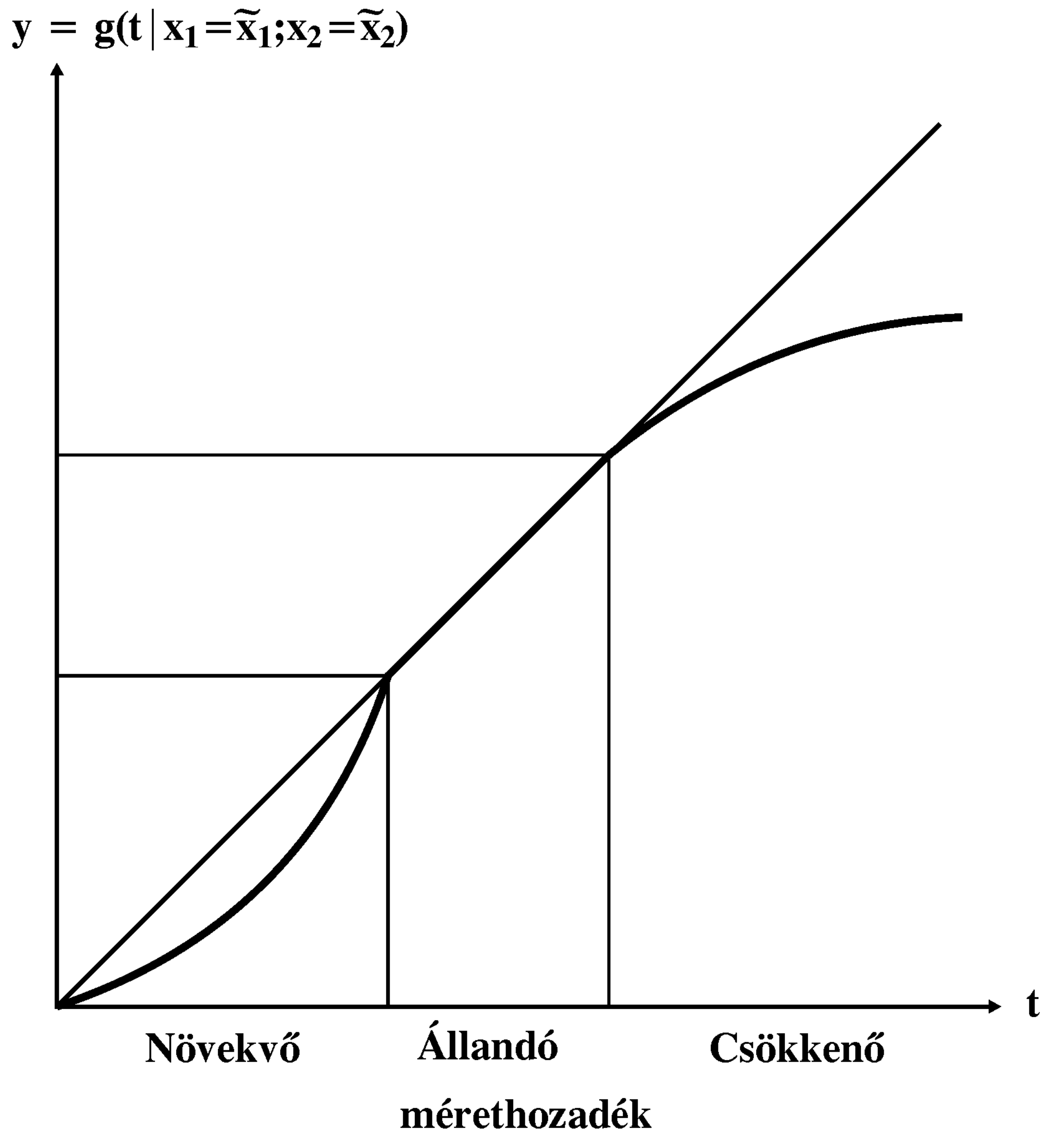
$$f(tx_1,tx_2) < t \cdot f(x_1,x_2) \quad ; \quad t > 1$$

15.23
Állandó mérethozadék



$$f(tx_1, tx_2) = t \cdot f(x_1, x_2) \quad ; \quad t > 1$$

15.24
A vállalatméret különböző tartományaiban lehet ugyanannál a vállalatnál növekvő, állandó, illetve csökkenő mérethozadék



15.25
Homogén termelési függvények, Euler-tétel

$$y = f(x_1, x_2)$$

Egy függvény k-ad fokban pozitív homogén, ha:

$$f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2) = t^k y; \quad \forall t > 0 \tag{1}$$

A homogén függvényekre érvényes az Euler-tétel (lásd 11. előadás). Idézzük föl!

Differenciáljuk t szerint (1)-et!

$$kt^{k-1}y = \frac{\partial f}{\partial(tx_1)}\frac{d(tx_1)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial(tx_2)}\frac{d(tx_2)}{dt} \tag{2}$$

Az egyenlet minden t-re igaz, így igaz $t = 1$-re is. $t = 1$ e-setben:

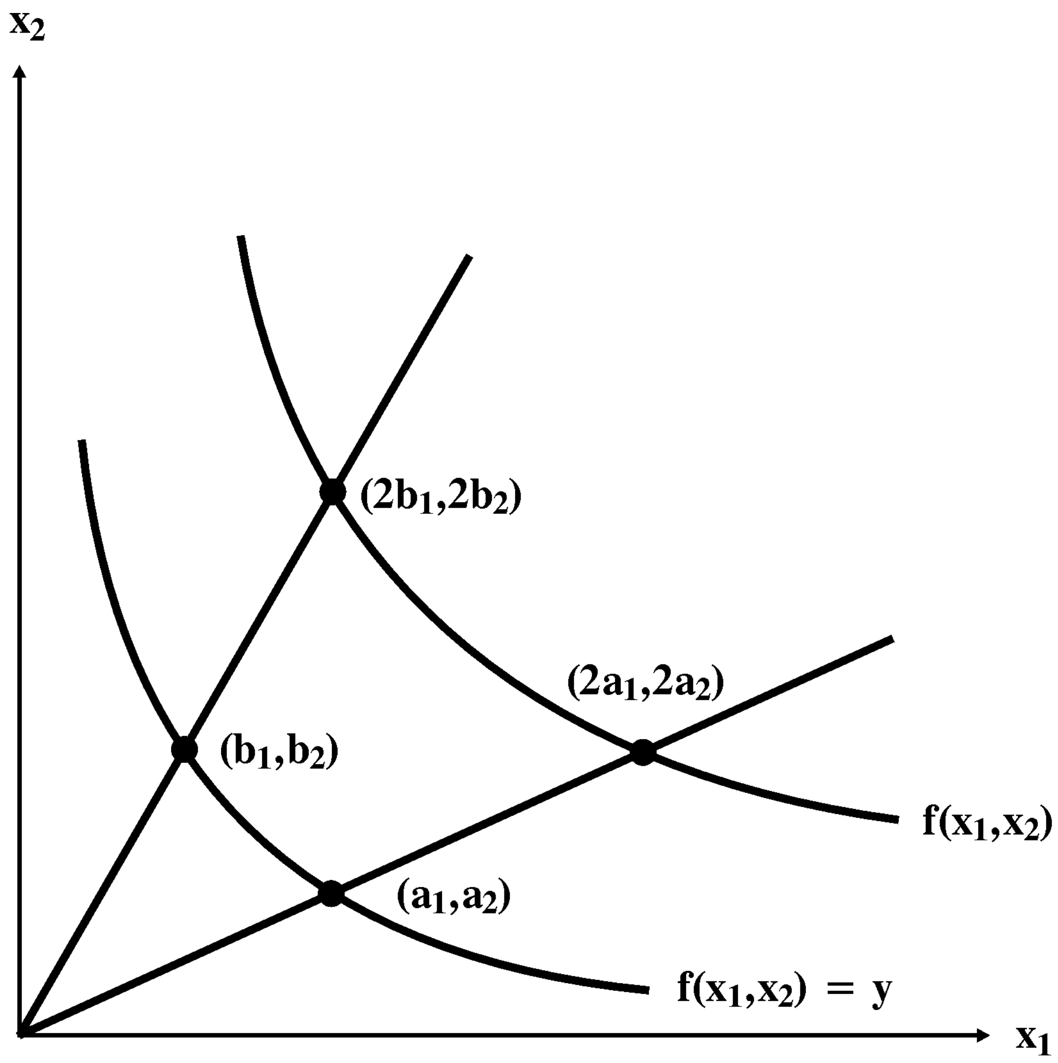
$$ky = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} \tag{3}$$

Vagyis k-ad fokban pozitív homogén függvényekre igaz:

$$\boxed{kf(x_1, x_2) = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}} \tag{4}$$

Euler-tétel

15.26
Elsőfokú homogén termelési függvény izokvantjai



$y = f(x_1,x_2)$ elsőfokú homogén:
$f(tx_1,tx_2) = t \cdot f(x_1,x_2) = ty$

15.27
A Cobb-Douglas termelési függvény hozadéki tulajdonságai

A Cobb-Douglas termelési függvény k-ad fokon pozitív homogény függvény:

$$y = Ax_1^a x_2^b \tag{1}$$

Vegyük az inputok t-szeresét:

$$\begin{aligned} y' &= A(tx_1)^a (tx_2)^b \\ &= t^{a+b} A x_1^a x_2^b \\ &= t^{a+b} y \end{aligned} \tag{2}$$

Vagyis: $$f(tx_1, tx_2) = t^{a+b} f(x_1, x_2) \tag{3}$$

Ha $a + b = 1 \Rightarrow$ állandó mérethozadék:

$$f(tx_1, tx_2) = t \cdot f(x_1, x_2)\ ;$$

Ha $a + b > 1 \Rightarrow$ növekvő mérethozadék. Ha $t > 1$:

$$f(tx_1, tx_2) > t \cdot f(x_1, x_2)\ ;$$

Ha $a + b < 1 \Rightarrow$ csökkenő mérethozadék. Ha $t > 1$:

$$f(tx_1, tx_2) < t \cdot f(x_1, x_2)\ .$$

15.28
Homotetikus függvények

Egy függvény akkor homotetikus, ha egy elsőfokú homogén függvény pozitív transzformáltja.

Ha $y = g(x_1, x_2)$ <u>elsőfokú homogén:</u>

$$g(tx_1, tx_2) = t \cdot g(x_1, x_2) \tag{1}$$

továbbá, ha $h(.)$ függvény <u>szigorúan növekvő</u>:

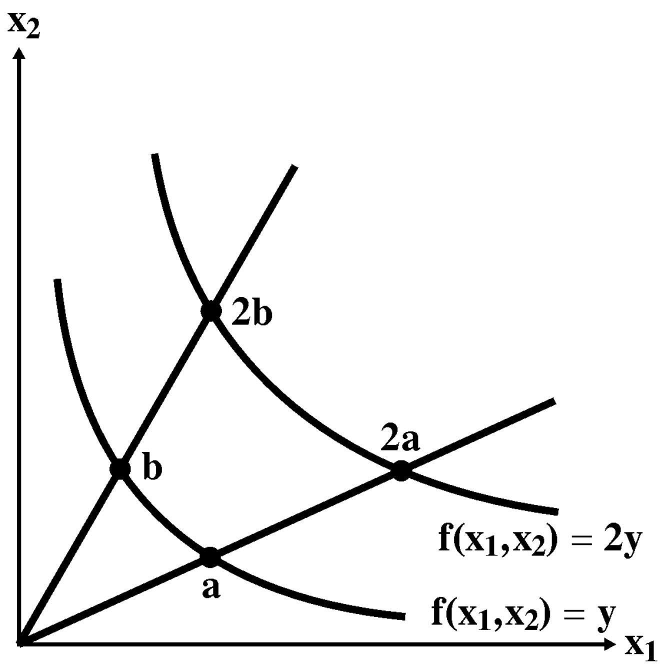
$$h'(.) > 0, \tag{2}$$

akkor a:

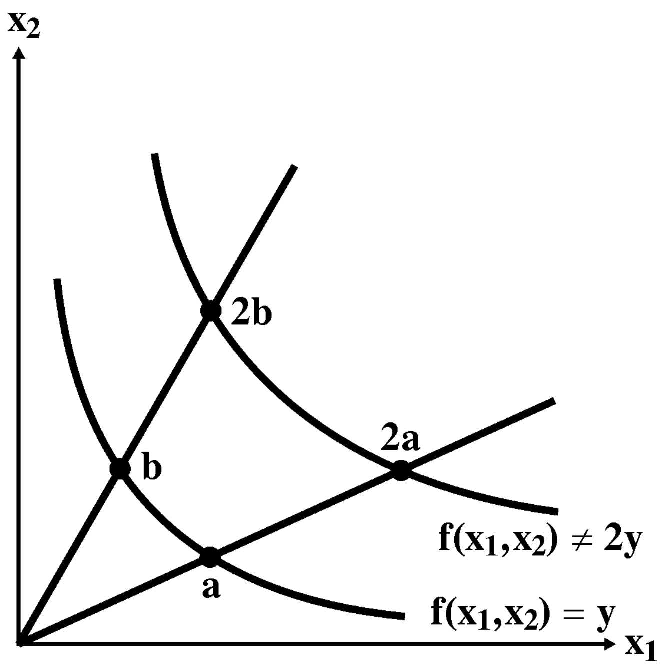
$$h(g(x_1, x_2)) = f(x_1, x_2) \tag{3}$$

függvény – definíció szerint – homotetikus függvény.

15.29
Homogén és homotetikus termelési függvények



Homogén függvény



Homotetikus függvény

$[a = (a_1,a_2)\ ;\ b = (b_1,b_2)]$