MIKRO-
ÖKONÓMIA
ELŐADÁSVÁZLATOK

9. előadás

SZLUCKIJ-TÉTEL

Kertesi Gábor

Varian 8. fejezete erősen átdolgozva

9.1 A probléma

– Hogyan változik a fogyasztói magatartás a gazdasági környezet változásának következtében, s miből adódhat ez a változás? – Megváltozik egy vagy több ár, változik a fogyasztó jövedelme, változnak a fogyasztás egyéb külső körülményei. A változások hatásának elemzésekor a fogyasztó keresleti függvényeit használjuk. Mik is azok? – Függvények sorozatai, amelyek megadják a fogyasztó *teljes* jószágkosarát képező javak *mindegyi-kének* optimális mennyiségét az összes jószág árának, a fogyasztó jövedelmének és egyéb lényeges külső körülményeknek – környezeti változóknak[1] – a függvényében. Algebrailag:

9.1 fólia

– Kétféle egyszerűsítést alkalmazunk: (*a*) eltekintünk a környezeti hatásokat kifejező változóktól; (*b*) a grafikus ábrázolás kedvéért a teljes jószágteret kétdimenziósra szűkítjük (*n* elemű vektor helyett kételemű vektor). Világosan látnunk kell: *soha sem egyetlen keresleti függvénnyel* van dolgunk, hanem mindig *a keresleti függvények rendszerével*, amely pontosan annyi egyenletből tevődik össze, ahány jószágból a fogyasztó jószágkosara áll. Kétdimenziós jószágtér esetében az alábbi egyenletrendszerrel dolgozunk:

9.2 fólia

– Jól látható, hogy három független változónk van: a két termék ára és a fogyasztó jövedelme. A múlt előadáson az itt felvetett problémát már tárgyaltuk: megvizsgáltuk, mi történik az x_1 jószág optimális fogyasztásával akkor, ha (*a*) *valamennyi* (itt: mindkét) *ár rögzítése mellett* változik a jövedelem, illetve ha (*b*) az x_1 jószág ára (p_1) változik, miközben *a többi termék* (itt: a másik termék) *ára és a fogyasztó jövedelme változatlan* marad.

– Hamarosan látni fogjuk, hogy a múlt órán alkalmazott megközelítés egy sor, sok szempontból megengedhetetlen egyszerűsítést tartalmazott:

(a) noha kétjószágos modellt alkalmaztunk, a jövedelemváltozás hatását csak az egyik jószágra nézve követtük, a másik jószág fogyasztásának esetleges változását figyelmen kívül hagytuk;

(b) nem vettük figyelembe azt a tényt, hogy ha egy ár változik (pl. csökken), miközben a másik ár és a fogyasztó *nominál*jövedelme változatlan marad, akkor a fogyasztó *reál*-jövedelme (jövedelmének reálértéke) is változik (nő), melynek következtében fogyasztása valamennyi általa fogyasztott jószágból változhat;

(c) ugyanebben az esetben az árváltozásnak csak az adott jószág fogyasztására gyakorolt hatását – a saját ár hatását – vettük számításba, és figyelmen kívül hagytuk azt a körülményt, hogy akárha csak *egyetlen ár változik* is, azzal a költségvetési korlátunkhoz tartozó *valamennyi árarány megváltozik*, s ez

[1] Mik lehetnek ezek? A szokások változása (például egészséges életmódra való áttérés), a divat változása, találmányok, új termékek, termékvariánsok megjelenése, a preferenciákat érő véletlen sokkok (például bioterrorizmus megjelenésének hatása a gázálarcok iránti keresletre), állami szabályozás (bizonyos tevékenységek hatósági tiltása vagy kötelezővé tétele).

reagálásra késztet bennünket a fogyasztásunk tárgyát képező *minden egyéb* jószág fogyasztásával kapcsolatban.

– Ezeket az egyszerűsítéseket azonban csupán kifejtéstechnikai okokból alkalmaztuk annak érdekében, hogy néhány fontosabb fogalom jelentését világosabban lássuk. Bevezettük (*a*) a jövedelem-ajánlati görbét és a belőle származtatható Engel-görbét, (*b*) az ár-ajánlati görbét és a belőle származtatható keresleti görbét (illetve az inverz keresleti görbét), (*c*) a helyettesítés és a komplementaritás (kiegészítés), végül pedig (*d*) a normál, az alsóbbrendű és a Giffen-javak fogalmát. Mindezek a fogalmak a keresleti elemzés igen hasznos, jól bevált technikai eszközei. A múlt előadáson bemutatott összefüggések azonban nem helyettesíthetik az árak és a jövedelem változására vonatkozó fogyasztói reakciók teljes körű elemzését. Ebben az előadásban erre teszünk kísérletet.

– Miért fontos ez? Erre a kérdésre a következő előadáson kapjuk meg a választ, amikor az egyéni keresleti függvények aggregálásával megkapjuk a piaci keresleti függvényeket. Intuitíve azonban már most is sejthetjük, hogy a piaci keresleti függvények (és a lehetséges változások hatásirányainak) ismerete nem lehet közömbös a szóban forgó javak termelőinek és forgalmazóinak. Továbbá azt is sejthetjük, hogy a gazdaság egészében előforduló valamennyi termékcsoport piaci keresleti függvényének aggregálása révén keletkező makroszintű keresleti függvény ismerete nem lehet közömbös a gazdaságpolitika irányítói számára.

9.2 A jövedelem- és helyettesítési hatás bevezetése

– Ha valamely exogén (külső) oknál fogva a keresleti rendszer egyik eleme megváltozik (megnő a fogyasztó jövedelme, vagy megváltozik az egyik ár, vagy akár mindkét ár), akkor annak következményei a keresleti rendszer *minden elemében* éreztetik hatásukat. Induljunk ki abból az egyszerű esetből, hogy csak egyetlen ár változik (p_1 csökken), miközben a másik jószág ára és a fogyasztó pénzjövedelme nem változik. Már a múlt órán is láttuk, mi történik ekkor:

9.3 fólia

– Az új árarányoknak megfelelően áttértünk egy magasabb hasznossági szintet képviselő közömbösségi görbére. Az optimális választáshoz itt az érintőfeltételnek teljesülnie kell. Mi lenne, ha nem teljesülne? (Lásd a 7. előadás során alkalmazott arbitrázs-érvet!)

– De miért is kerültünk ez esetben az eredetinél *magasabb* hasznossági szintre? Ha egy kéttermékes világban az egyik jószág ára csökken, miközben a másik ár és a jövedelem változatlan marad, akkor fogyasztó elkölthető jövedelme *többet ér* (több jószág vásár-lására alkalmas), mint korábban. Nomináljövedelme nem változott, de jövedelmének *vásárlóértéke (reáljövedelme) megnőtt*. Nyilvánvalóan *többet fog fogyasztani valamelyik (esetleg mindkét) termékből*.[2] Ezt a hatást nevezzük **jövedelemhatásnak.** Mivel jól

---

[2] Milyen feltétel mellett érvényes ez a következtetés? Akkor, ha a fogyasztónak nincs megtakarítása, vagyis ha az így megnövekedett reáljövedelméből nem rak félre jövőbeli fogyasztása céljaira. *Ebben* a modellben nincs idő. Jövedelmünket teljesen elköltjük. A mikroökonómia tárgy második félévében látunk majd olyan modellt is, amelyben szerepel megtakarítás, és így jelenbeli jövedelmünk egy részét átcsoportosíthatjuk jövőbeli fogyasztásra.

viselkedő preferenciák esetén, a monotonitás feltétele miatt a több egyszersmind jobb, magasabb hasznossági szintre (magasabb indexű közömbösségi görbére) kerülünk.

– Másrészt az x_1 jószág árának változása – mint említettük – megváltoztatja a rendszerben előforduló összes (n–1) árarányt is, jelen esetben a két termék árarányát: $(p_1' / p_2) < (p_1 / p_2)$. x_1 jószág relatíve olcsóbb lett x_2-höz képest. Ha az eredeti döntésünk (p_1, p_2 áraknak és m jövedelemnek megfelelő optimális fogyasztás) (x_1^*, x_2^*) pontjában egyfelől értékeljük azt, hogy számunkra szubjektíve milyen értéket képvisel a két termék egymáshoz képest (vagyis mekkora a helyettesítési határráta), másfelől mibe kerül a két termék objektíve a piacon egymáshoz képest (vagyis milyen arányban tudnánk egyiket a másikra cserélni), akkor azt látjuk, hogy az új árarányok mellett nem maradhatunk meg eredeti választásunknál.

9.4 fólia

– Az adott pontban ugyanis az x_1 termék az x_2-höz képest nagyobb értéket képvisel számunkra, mint amibe kerül, vagy fordítva nézve: az x_2 termék az x_1-hez képest kisebb érteket képvisel, mint amibe kerül[3]. Optimális fogyasztói kosarunk összetételét tehát meg kell változtatnunk: több x_1 mennyiséget és kevesebb x_2 mennyiséget kell fogyasztanunk. Fogyasztási szerkezetünkben *x_2 jószág egy részét x_1-gyel helyettesítjük*. Ezt a hatást nevezzük **helyettesítési hatásnak**.

9.3 A helyettesítési hatás és a jövedelemhatás szétválasztása grafikus eszközökkel

– Egy jószág árának változása (itt: csökkenése) tehát kétfajta következménnyel jár: egyrészt az árcsökkenés megnöveli jövedelmünk reálértékét, ezért (legalább az egyik termékből) többet fogunk fogyasztani (*jövedelemhatás*), másrészt az árarány változása miatt a relatíve olcsóbbá vált jószágból többet, a relatíve megdrágult jószágból pedig kevesebbet fogunk fogyasztani (*helyettesítési hatás*). Hogyan lehetne ezt a két hatást szétválasztani?

– A helyettesítési hatás mérésére két lehetőség kínálkozik: (*a*) az eredeti döntésünknek megfelelő *reáljövedelmünket (jövedelmünk vásárlóerejét) rögzítjük*, és megkeressük a rögzített reáljövedelemnek és az új áraránynak megfelelő optimális jószágkosarat (a helyettesítési hatás Szluckij-féle[4] mérése), vagy pedig (b) az eredeti döntésünknek megfelelő optimális *hasznossági szintet rögzítjük*, és megkeressük e rögzített hasznossági szinthez, valamint az új arányhoz tartozó optimális jószágkosarat (a helyettesítési hatás Hicks-féle[5] mérése). A két esetben a jövedelemhatás mérése is más.

9.5 fólia

– Mindkét esetben ugyanazt látjuk: a relatíve olcsóbbá vált termékből többet (nem kevesebbet), a megdrágult termékből kevesebbet (nem többet) fogyasztunk. **A**

[3] „Amibe kerül”: egyik jószág alternatív költsége a másik jószág egységében mérve.
[4] Jevgenyij Szluckij (1880-1948) orosz közgazdász és statisztikus, a modern keresletelmélet egyik úttörője.
[5] John R. Hicks (1904-1989), Nobel-díjas angol közgazdász, a modern mikroelmélet egyik megteremtője.

továbbiakban mi a Hicks-féle hatás-felbontást (dekomponálást) használjuk.[6] Egy további technikai megjegyzés. A grafikus szemléltetés során a *legjellegzetesebb (empirikusan leggyakrabban előforduló) esetet* fogjuk alapul venni, amikor mindkét termékünk normál jószág (vagyis a fogyasztás a reáljövedelem emelkedésekor nő). Természetesen más esetek is elképzelhetők (alsóbbrendű vagy Giffen-javak), ezeket a 9.4 pontban tárgyaljuk majd.

– A Hicks-féle hatásfelbontás kapcsán azonban egy igen fontos dologra kell fölhívni a figyelmet. Egy korábban tanult modellt alkalmazunk a helyettesítési hatás Hicks-féle mérése során:

9.6 fólia

– Megkeressük azt a kiadási szintet, amellyel – adott árarány mellett – a legkisebb költséggel realizálni tudunk egy általunk előre rögzített hasznossági szintet. Ez az eljárás nem más, mint a 7. előadáson tanult kiadásminimalizálási probléma megoldása.

– A **helyettesítési hatás** Hicks-féle mérésekor tehát a következőképpen járunk el:

9.7 fólia

Az eredeti árarányok (p_1 / p_2) és jövedelemszint (m) mellett megoldjuk a haszonmaximalizálási feladatot, és meghatározzuk az optimális megoldáshoz – az *A* ponthoz (x_1^*, x_2^*)-höz – tartozó hasznossági szintet ($\widetilde{u} = u(x_1^*, x_2^*)$). Rögzítjük ezt az $\widetilde{u}$ hasznossági szintet, és meghatározzuk az $\widetilde{u}$-nak és a megváltozott árarányoknak (p_1' / p_2) megfelelő új optimális megoldást (*B* pont) és a hozzá tartozó minimális kiadási szintet ($\widetilde{m}$).

Az eredeti optimum (*A* pont) és az újonnan meghatározott optimum (*B* pont) közti elmozdulás nem más, mint a helyettesítési hatás mértéke. Vegyük észre, hogy – mint a neve is mutatja – a helyettesítési hatás mindkét jószág fogyasztását érinti: a megváltozott áraránynak (*és csakis annak*) köszönhetően, a relatíve olcsóbbá vált jószág fogyasztása megnő, a relatíve megdrágult jószágé pedig lecsökkent, – függetlenül attól, hogy csak az egyik jószág ára változott meg. Terminológia: saját-árhatás ($\partial x_1 / \partial p_1 |_{u=\widetilde{u}}$); kereszt-árhatás ($\partial x_2 / \partial p_1 |_{u=\widetilde{u}}$).

– A **jövedelemhatás** mérése innen már egyszerűen megoldható: a $p_1' < p_1$ árcsökkenésnek megfelelő vásárlóerő- (reáljövedelem-) növekedést egyszerűen úgy ábrázoljuk, mintha a fogyasztó jövedelme a *B* ponthoz tartozó minimális kiadási szintről megnőtt volna: $m > \widetilde{m}$ (ezzel a fogyasztó ismét az eredeti jövedelemszintre került).

9.8 fólia

– Rakjuk össze a modell két elemét: a helyettesítési hatást és a jövedelemhatást.

[6] Noha a kétfajta eljárás egyaránt használatos, és bizonyos célokra az egyik, más célokra a másik tűnik jobbnak, a Szluckij-tétel kimondásához és bizonyításához a közgazdászok többnyire a Hicks-féle mérést szokták használni.

9.9 fólia

– A helyettesítési hatás ellentétes előjelű a két terméknél. (Megjegyzés: kéttermékes modellben elkerülhetetlen, hogy ha egy jószágból nő a fogyasztás – rögzített hasznossági szint mellett –, a másik jószágból csökkenjen. $n > 2$ termék esetében bonyolultabb összefüggések is érvényesülhetnek.) Árváltozáskor a kiegészítő (komplementer) javak fogyasztása együtt mozog a kérdéses jószág fogyasztásával, a helyettesítő javak fogyasztása pedig ellentétesen.[7] Erről a kérdésről részletesebben beszélünk majd a következő órán.

– Mi a helyzet a jövedelemhatással? Mivel a közömbösségi térképet úgy rajzoltuk meg, hogy mindkét termékünk normál jószág legyen, a jövedelemhatás előjele mindkét jószág esetében pozitív: magasabb jövedelem => több fogyasztás.

– A helyettesítési hatás és a jövedelemhatás additív: így a teljes hatás az ábráról könnyűszerrel leolvasható.

9.4 Kitérő az alesetekről: alsóbbrendű javak, Giffen-javak

– Ejtsünk néhány szót az alesetekről. Tegyük föl, hogy x_1 jószág **alsóbbrendű**. Egy ilyen jószág fogyasztását a jövedelem növekedése bizonyos jövedelemszint felett inverz módon befolyásolja. Lehetséges-e, hogy a fogyasztói kosarunkban levő valamennyi (jelen esetben: mindkét) jószág alsóbbrendű legyen? Nem. A jövedelemnövekményt valahogy el kell költeni. Legalább az egyik jószágnak normál jószágnak kell lennie.

– Rajzoljuk újra a preferenciatérképet alsóbbrendű jószág esetén:

9.10 fólia

– Alsóbbrendű javaknál a helyettesítési hatás és a jövedelemhatás ellentétes irányú. A teljes hatás előjele nyilvánvalóan a két hatás abszolút nagyságától függ. Abban az esetben, ha a helyettesítési hatás erősebb, mint az (ebben a speciális esetben) vele ellentétes irányú jövedelemhatás, akkor a teljes hatás negatív marad, jóllehet nagyságát tekintve gyengébb lesz, mint abban az esetben, ha a termékünk normál jószág lenne.

– Az alsóbbrendű javak *szélsőséges esete* a **Giffen-jószág**, amelynél a helyettesítési hatással ellentétes irányú a jövedelemhatás, s erősebb is, mint a helyettesítési hatás. Ilyenkor a teljes hatás negatív lesz, vagyis a csökkenő árú jószág fogyasztása is csökkenni fog.

9.11 fólia

– Noha ez az eset elvileg lehetséges, empirikusan annyira ritka, hogy gyakorlati szempontból teljesen érdektelennek tekinthető.

[7] Belátható, hogy n termék esetén, ha vannak is kiegészítő javak, valamilyen mértékű helyettesítésnek lennie kell a rendszerben.

– E rövid kitérő után visszatérünk a főcsapásra. A korábban bemutatott felbontásnak algebrai formát is adunk. Továbbá kimondjuk és bebizonyítjuk a keresletelmélet egyik fontos tételét, a Szluckij-tételt.

9.5 A helyettesítési hatás és a jövedelemhatás algebrai szétválasztása: Szluckij-tétel

A tétel kimondásának és bizonyításának lépései a következők:

9.12 fólia

1. *lépés*: Felelevenítjük a *hasznosságmaximalizálási* feladatot, és levezetjük belőle származtatott (ún. *marshalli*) keresleti függvényt.

9.13 fólia

2. *lépés*: Felelevenítjük a *kiadásminimalizálási* feladatot, és levezetjük a belőle származtatott (ún. *hicksi*) keresleti függvényt.

9.14 fólia

Megjegyzés: a **hicksi** keresleti függvényt **kompenzált** keresleti függvénynek is nevezik: $x_1^H = x_1^H(p_1, p_1, \tilde{u})$. Ennek az az oka, hogy a függvény definíciójából adódóan ($u = \tilde{u}$) nem teszünk egyebet, mint folyamatosan „hozzáigazítjuk” a fogyasztó reáljövedelmét az árváltozásokhoz annak érdekében, hogy a fogyasztót egy rögzített hasznossági szinten tartsuk. Pl. ha – mint az előzőekben kifejtett esetben tettük – csökkentjük az egyik árat, akkor a fogyasztó reáljövedelmét is olyan mértékben csökkentjük, amely éppen elegendő ahhoz, hogy hasznossági szintje az eredeti optimális döntéséhez tartozó szinten maradjon. Vagy ha – épp ellenkezőleg – növeljük az egyik árat, akkor éppen annyi pótlólagos jövedelemmel „kárpótoljuk” („kompenzáljuk”), hogy új optimális döntését azon *feltétel mellett* tanulmányozhassuk, mintha korábbi optimumának megfelelő hasznossági szintjéről nem mozdult volna el.

A **marshalli** keresleti függvényt, melyben ilyen korlátozással nem élünk, analóg módon **kompenzálatlan** keresleti függvénynek nevezzük.

3. *lépés*: A hicksi keresleti függvénnyel összhangban bevezetünk egy fontos új fogalmat: a **kiadási függvényt:**

9.15 fólia

A kiadási függvény megadja egy rögzített hasznossági szint eléréséhez minimálisan szükséges pénzkiadás mértékét a mindenkori árak és az elérni kívánt hasznossági szint függvényében. A kiadási függvény tehát a mi kéttermékes esetünkben egy háromváltozós függvény. Függő változója az adott két árhoz és a rögzített hasznossági szinthez minimálisan szükséges pénzkiadás mértéke, amely kiadási szint a három argumentum – a két ár és a bárhol rögzíthető hasznossági szint – függvényében változhat.

A Szluckij-tétel bizonyítása céljából kiemelünk egyet a kiadási függvény számos fontos (e helyütt nem részletezett) tulajdonsága közül. Ez a gondolat átvezet a 4. lépéshez.

4. *lépés*: Kimondjuk a kiadási függvény egy fontos tulajdonságát a Shephard-lemmát (segédtételt).

Shephard-lemma: A kiadási függvény ár szerinti parciális deriváltja (feltéve, hogy létezik) egyenlő a megfelelő jószág hicksi keresleti függvényével.

9.16 fólia

Bizonyítsuk be ezt a tételt.

9.17 és 9.18 fólia

5. *lépés*: A Szluckij-tétel kimondásához és bizonyításához szükséges legfontosabb gondolat a **dualitási szemlélet.** Intuitíve igen világos és egyszerű dologról van szó. A fogyasztói döntés problémáját – mint azt a 7. előadás során bemutattuk – kétféleképpen szemlélhetjük:

(a) Adottnak vesszük a jövedelmünket és az árakat, és megkeressük az ilyen feltételek mellett számunkra elérhető legmagasabb hasznossági szintet. Kiválasztjuk a számunkra megfizethető legjobb jószágkosarat => *hasznosságmaximalizálás*.

(b) Fordított módon is eljárhatunk. Rögzíthetünk egy hasznossági szintet, melynél kevesebbel nem érjük be, és megkeressük azt a minimális kiadási szintet (vagy elkölthető jövedelmet), amivel ezt a tervünket megvalósíthatjuk. Kiválasztjuk az adott hasznossági szintet elérő, legkisebb pénzkiadás révén megvásárolható jószágkosarat => *kiadásminimalizálás*.

A dualitási szemlélet lényege, hogy minden haszonmaximalizálási problémának megfeleltethető egy kiadásminimalizálási probléma, amely pontosan ugyanazt a megoldást (ugyanazt az optimális jószágkosarat) adja, mint a kiindulópontnak választott haszonmaximalizálási probléma. Ugyanez igaz megfordítva is.

9.19 fólia

De ha ez igaz, akkor az *optimális jószágkosarak bármelyikét* előállíthatjuk két egymásnak kölcsönösen megfeleltethető kiadásminimalizálási, illetve haszonmaximalizálási feladat eredményeképpen. Ezt a **hicksi és marshalli keresleti függvények segítségével** operacionalizálhatjuk**.** A *kiadásminimalizálási* problémánál (és ebből adódóan a hicksi keresleti függvényben) épp azon a hasznossági szinten minimalizáljuk kiadásainkat, ahová a *haszonmaximalizálási* probléma megoldásakor eljutottunk. Vagy megfordítva: a *haszonmaximalizálási* probléma költségvetési korlátjában (és ebből adódóan a marshalli keresleti függvényben) épp annyi jövedelmet adunk a fogyasztónak, amennyi a *kiadásminimalizálási* feladatban elérni kívánt hasznossági szint realizálásához minimálisan szükségesnek bizonyult.

Amennyiben tehát a haszonmaximalizálási problémában szereplő rögzített jövedelmet, illetve a kiadásminimalizálási problémában szereplő rögzített hasznossági szintet az előbbiek értelmében *egymáshoz igazítjuk*, akkor *az ily módon meghatározott pontokban (jószágkosarak esetében)* a marshalli és hicksi keresleti függvények értékei egybeesnek.

6. *lépés*: A Szluckij-tétel általános kimondásához írjuk föl az előző fólián látható azonosságot, és írjuk ki a függvények valamennyi argumentumát. Differenciáljuk az azonosságot valamelyik (az *i*-edik vagy *j*-edik) ár szerint.

9.20 fólia

A tételt ezzel kimondtuk, és egyszersmind be is bizonyítottuk. A fenti egyenletet értelemszerűen **Szluckij-egyenletnek** nevezik.

9.6 A Szluckij-tétel közgazdasági értelmezése és következményei

– Ugyanarról van szó, mint amiről eddig is beszéltünk: a Szluckij-egyenlet pontos formulát ad annak, ahogy az árváltozás okozta keresletváltozást komponenseire – helyettesítési és jövedelemhatásra – bontjuk.

9.21 fólia

– Szorozzuk végig az egyenletet az x_1 terméket érintő árváltozással ($dp_1 = p_1' - p_1 < 0$):

9.22 fólia

– Az x_1 termék árcsökkenése természetesen hatással van a keresleti rendszer *összes többi* termékéből (itt: a másik termékből) fogyasztott optimális mennyiségre is:

9.23 fólia

– A saját árhatással kapcsolatban kimondunk egy igen fontos tulajdonságot. Nevezetesen: **a saját helyettesítési hatás előjele mindig ellentétes az árváltozás előjelével.** Másképpen: a keresett mennyiség változása mindig ellentétes előjelű, mint a szóban forgó termék árának változása:

9.24 és 9.25 fólia

Következmény: **A hicksi keresleti függvény negatív (nem-pozitív) meredekségű.**

– A fejezet lezárásaként kimondjuk a keresletelmélet egy igen fontos megállapítását, a **kereslet törvényét**[8]: ha egy termék normál jószág (vagyis fogyasztása a jövedelem növekedésével emelkedik), akkor az árcsökkenés következtében az illető jószág fogyasztása nő, illetve árnövekedéskor a jószág fogyasztása csökken.

A kereslet törvénye nyilvánvalóan a Szluckij-tétel következménye, ugyanis normál jószág árváltozása esetén mind a saját árhatás (ezt az előbb láttuk be), mind a jövedelemhatás negatív. Mivel a két hatás összeadódik, a teljes hatás előjele is negatív.

[8] Samuelson ezt egyenesen a „keresletelmélet alaptételének” (fundamental theorem of consumption theory) nevezte.

Következmény: **normál javak esetén a (marshalli) keresleti görbe negatív (nem pozitív) meredekségű.** Megjegyzés: amikor jelző nélkül használjuk a „keresleti görbe” kifejezést, akkor mindig – a helyettesítési hatást és jövedelemhatást egyaránt magában foglaló – marshalli keresleti görbéről beszélünk.

– **Házi feladat**: Rajzoljuk le a hicksi és marshalli keresleti görbét egy grafikonra, és mutassuk meg rajta az árcsökkenés okozta saját helyettesítési és jövedelemhatást.

Jevgenyij Szluckij
(1880–1948)

MIKRO-
ÖKONÓMIA
ELŐADÁSVÁZLATOK

9. előadás

SZLUCKIJ-TÉTEL

MELLÉKLET

Kertesi Gábor

9.1
A keresleti rendszer n termék esetén

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n, m, K_1, ..., K_l)$$

$$x_2 = x_2(p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n, m, K_1, ..., K_l)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$x_i = x_i(p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n, m, K_1, ..., K_l)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

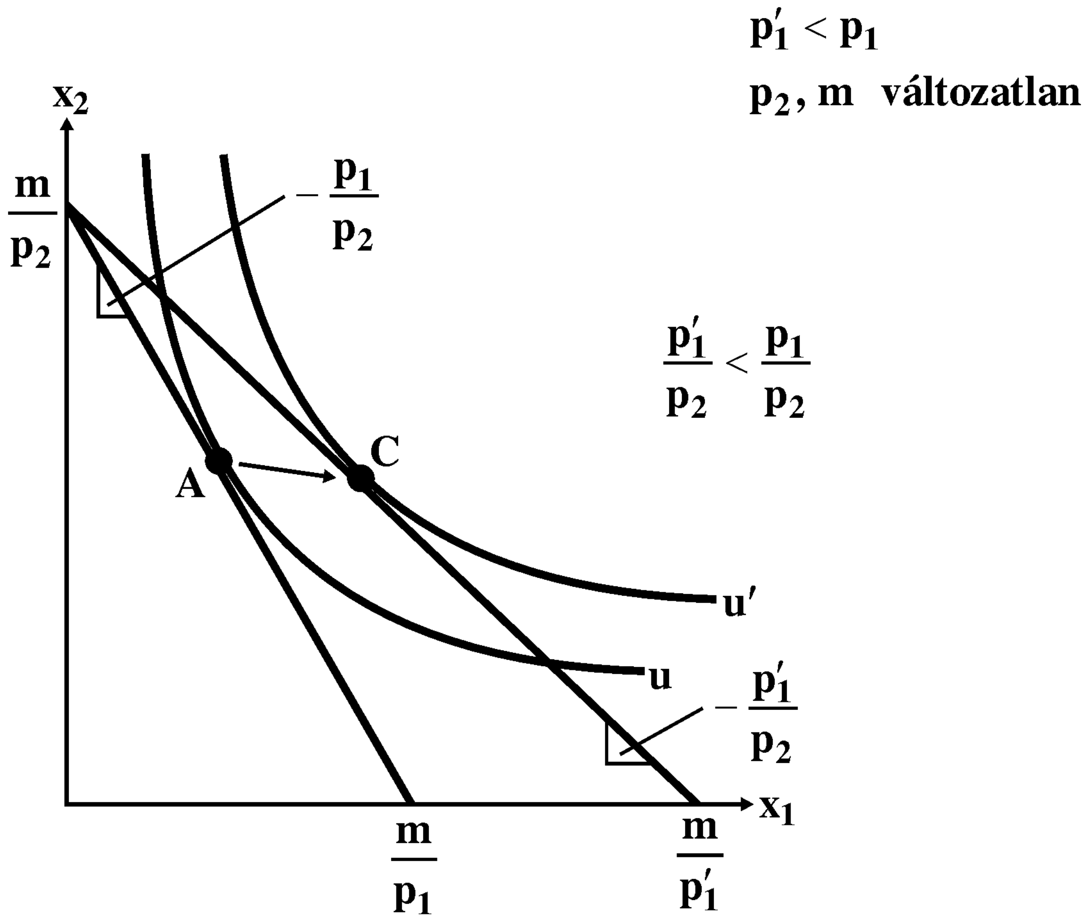
$$x_n = x_n(p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n, m, K_1, ..., K_l)$$

9.2
Kéttermékes keresleti rendszer (környezeti változók nélkül)

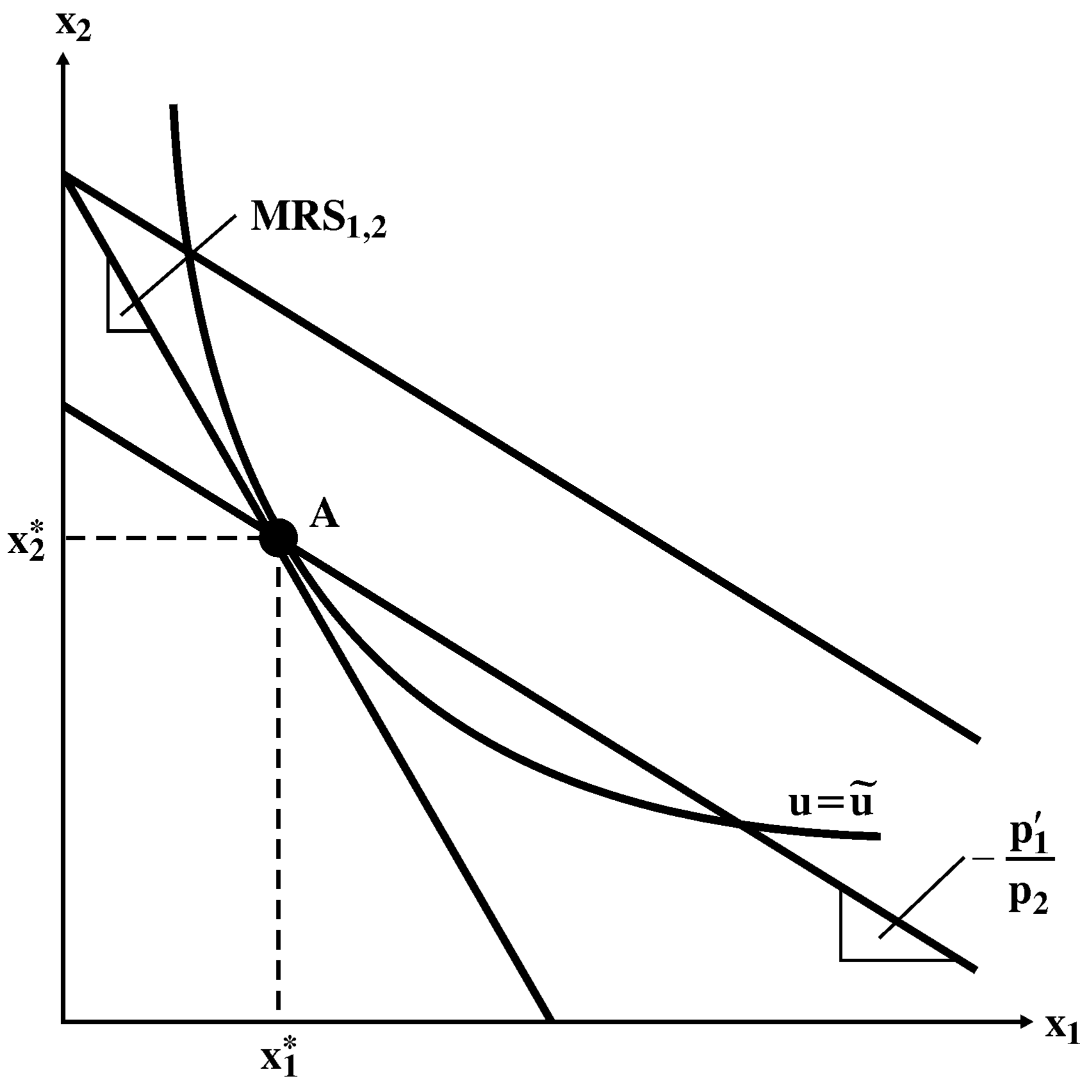
$$\mathbf{x_1 = x_1(p_1, p_2, m)}$$

$$\mathbf{x_2 = x_2(p_1, p_2, m)}$$

9.3
Az árváltozás hatása a fogyasztói döntésre



9.4
Az új árarány mellett nem maradhatunk meg eredeti döntésünknél



„A” pontban:

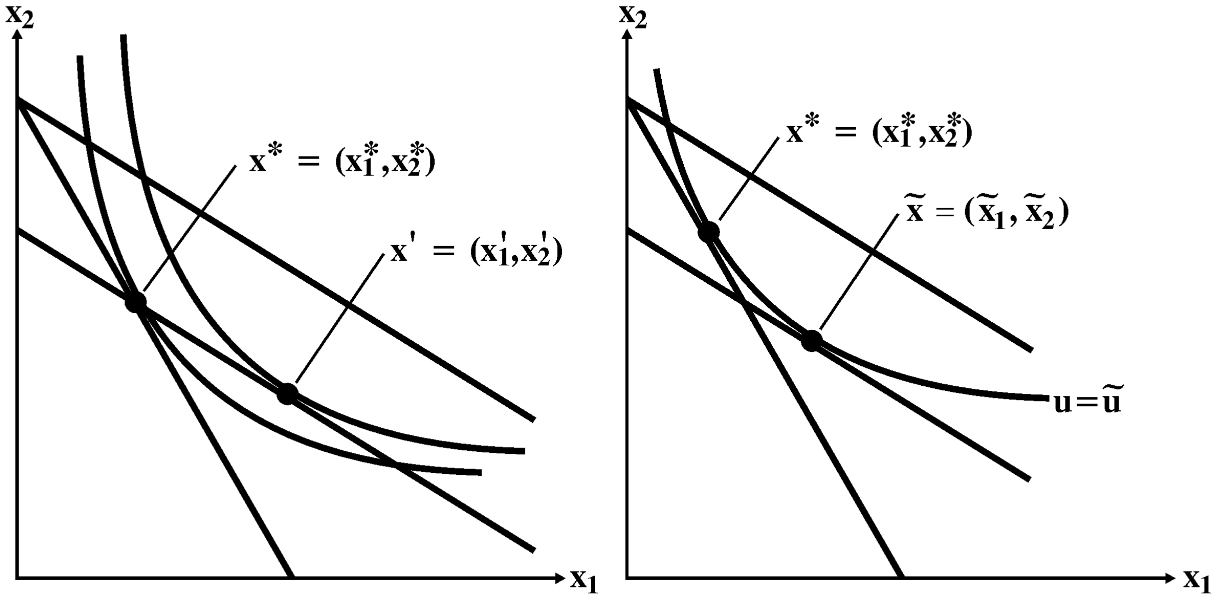
$$MRS_{1,2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial x_2} > \frac{p_1'}{p_2}$$

$\Rightarrow$ több x_1-et és
kevesebb x_2-t
kell fogyasztanunk.

9.5
A helyettesítési hatás kétféle mérése

(a) Szluckij-féle mérés
$x^* \Rightarrow x'$

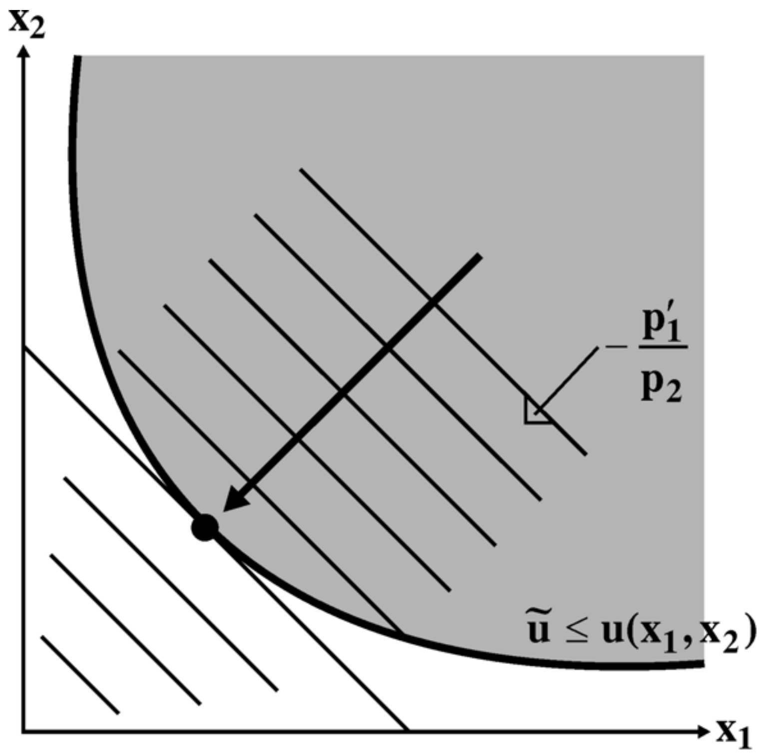
(b) Hicks-féle mérés
$x^* \Rightarrow \tilde{x}$



x*-nak megfelelő reáljövedelem rögzítve

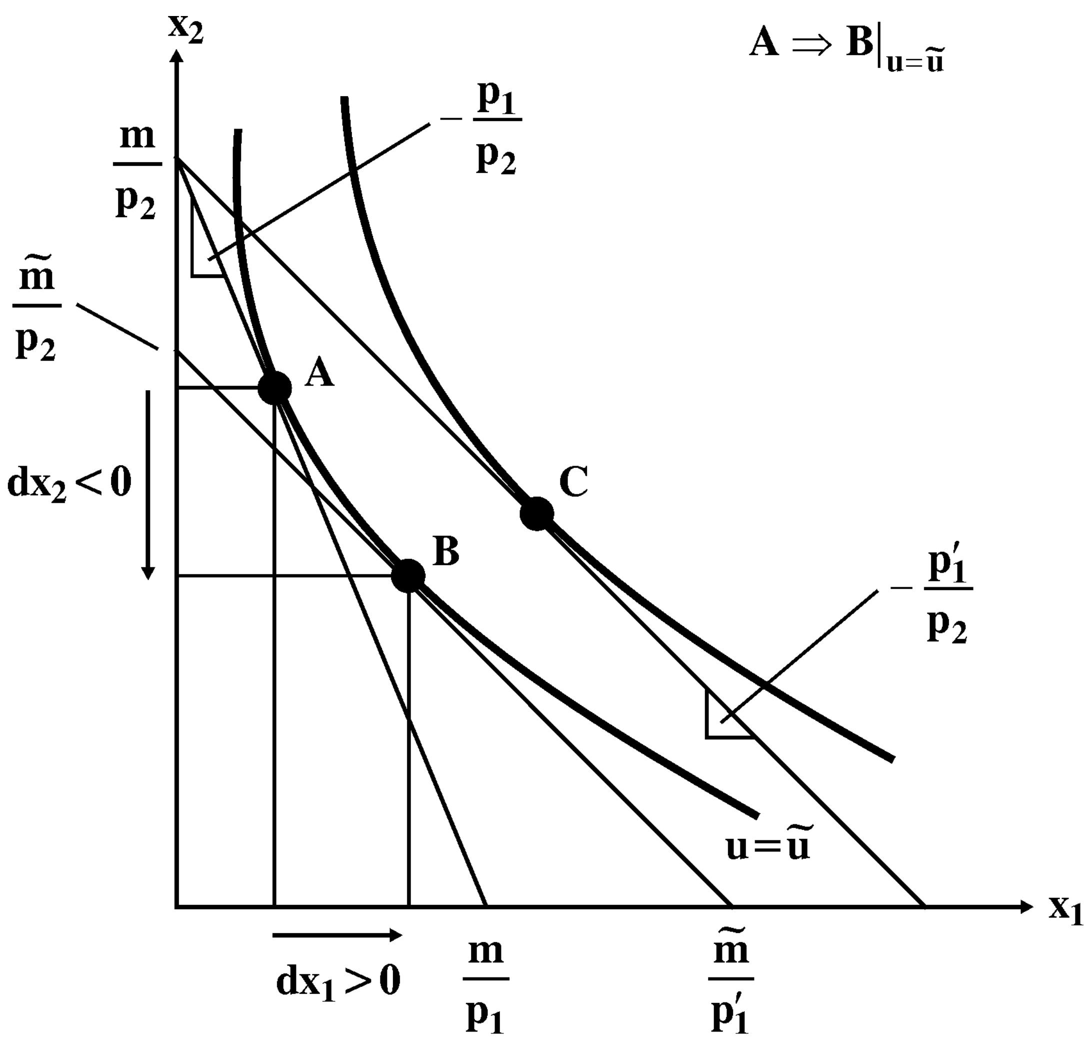
x*-nak megfelelő hasznossági szint rögzítve

9.6
A kiadásminimalizálási probléma

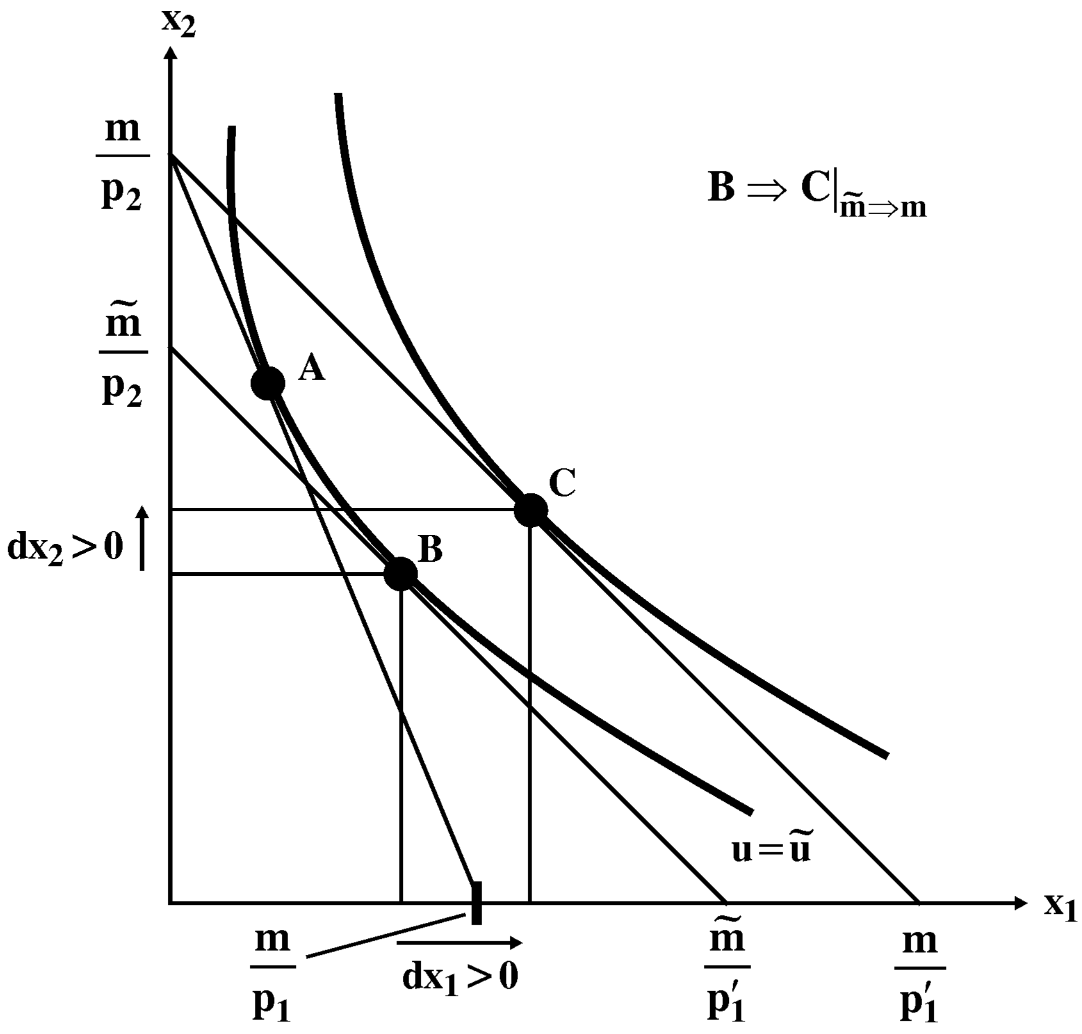


$$\min(p_1' x_1 + p_2 x_2)$$
$$\text{kf: } \tilde{u} \le u(x_1, x_2)$$

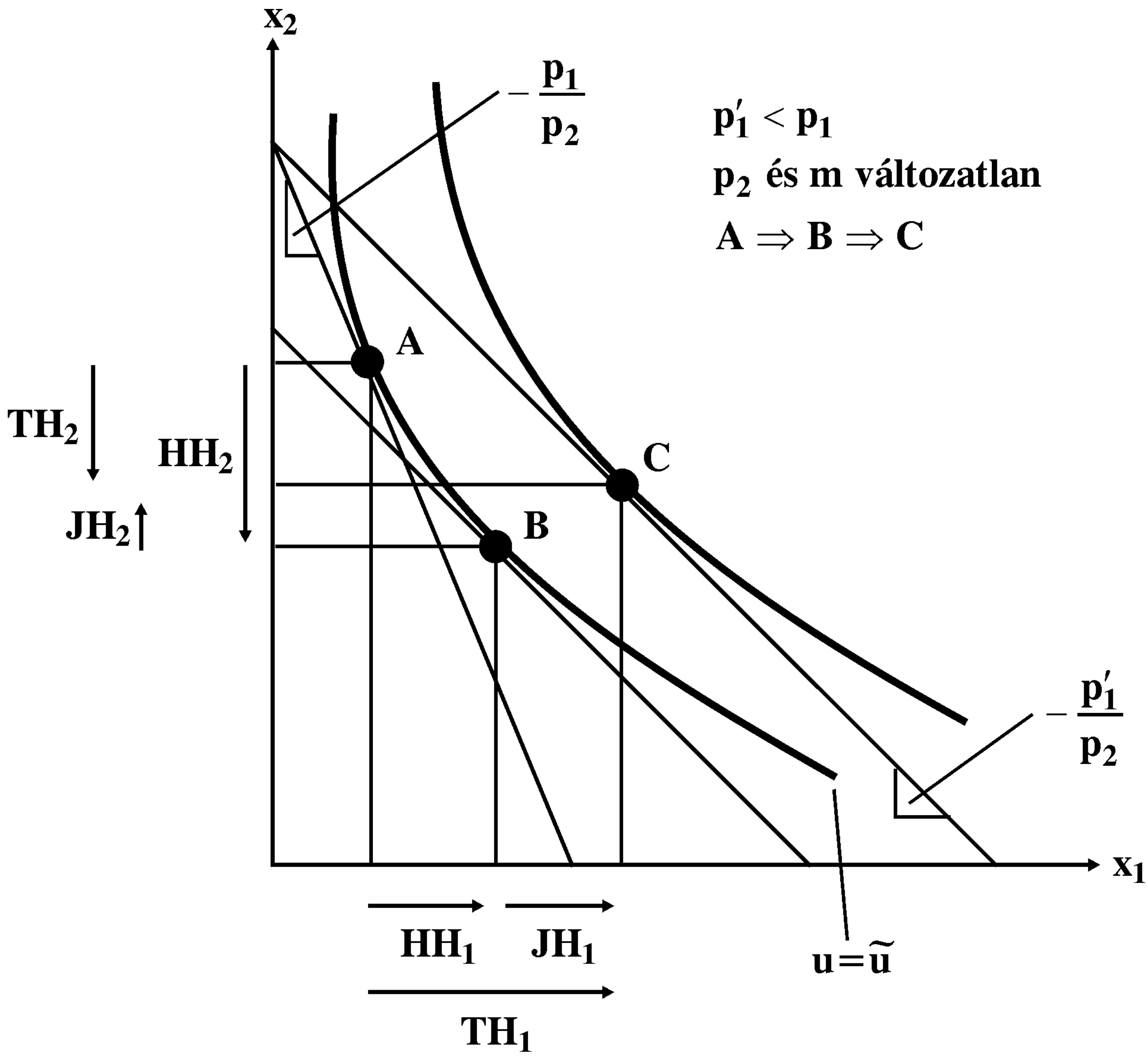
9.7
Helyettesítési hatás



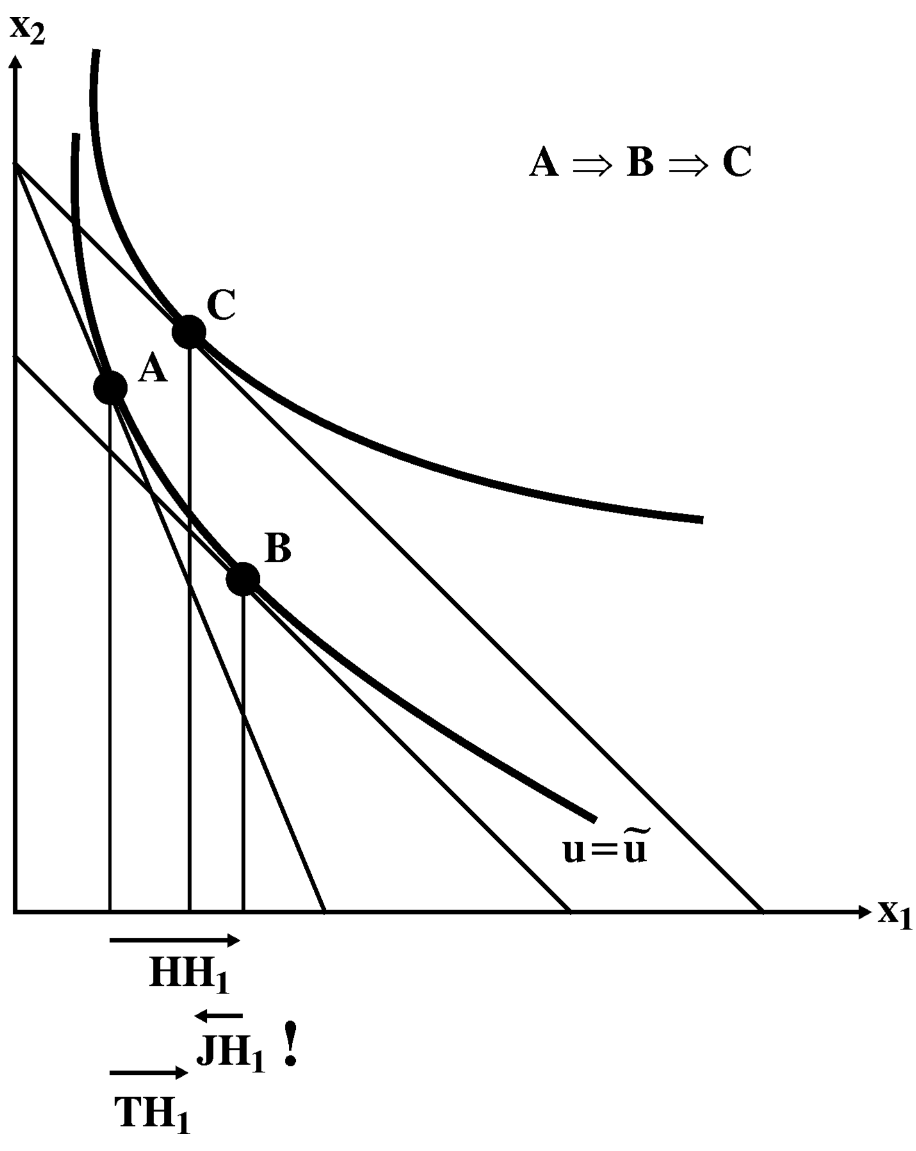
9.8
Jövedelemhatás



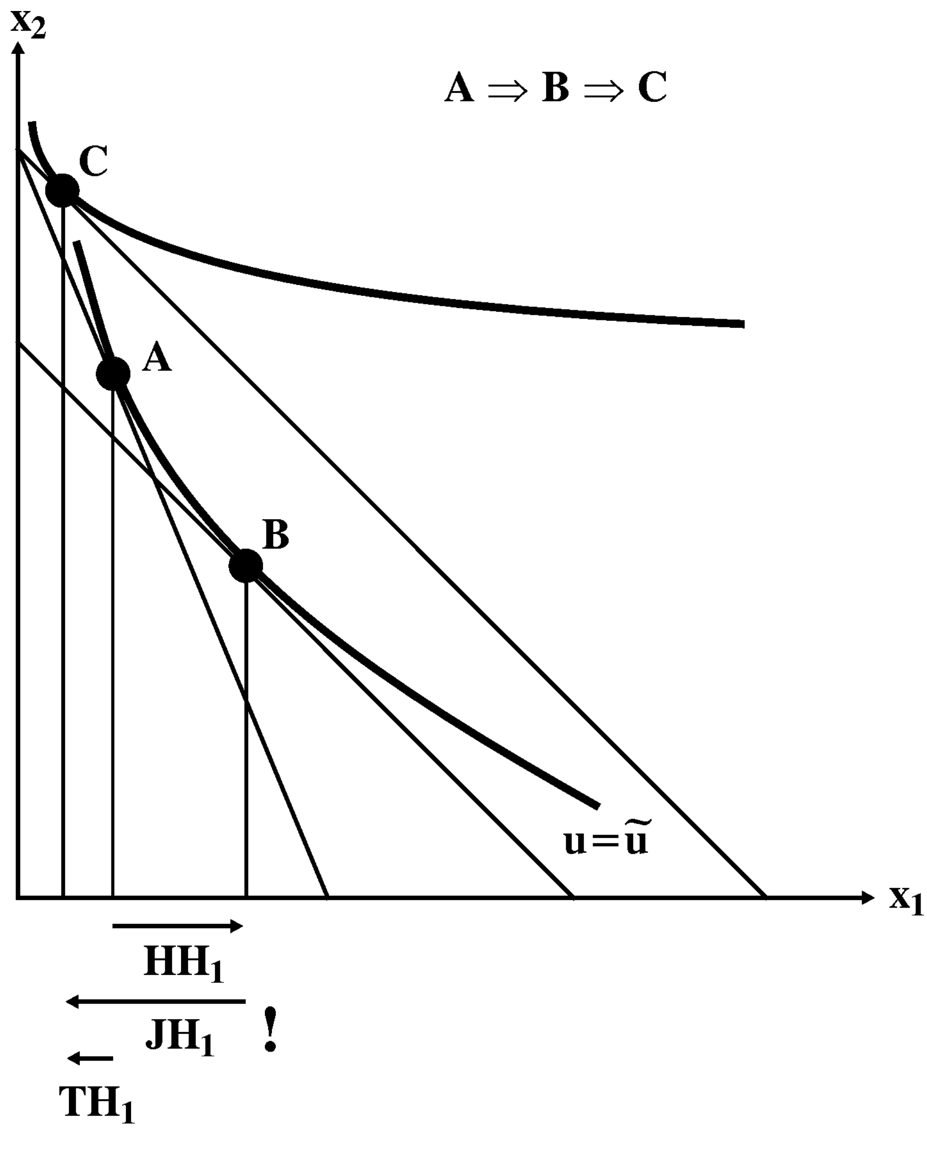
9.9
A helyettesítési hatás és a jövedelemhatás együtt



9.10
Alsóbbrendű jószág (x_1)



9.11
Giffen-jószág ≡ szélsőségesen alsóbbrendű jószág (x_1)



9.12
A Szluckij-tétel levezetésének logikai lépései

1. lépés: hasznosságmax. $\Rightarrow$ marshalli keresleti fv.

2. lépés: kiadásmin. $\Rightarrow$ hicksi keresleti fv.

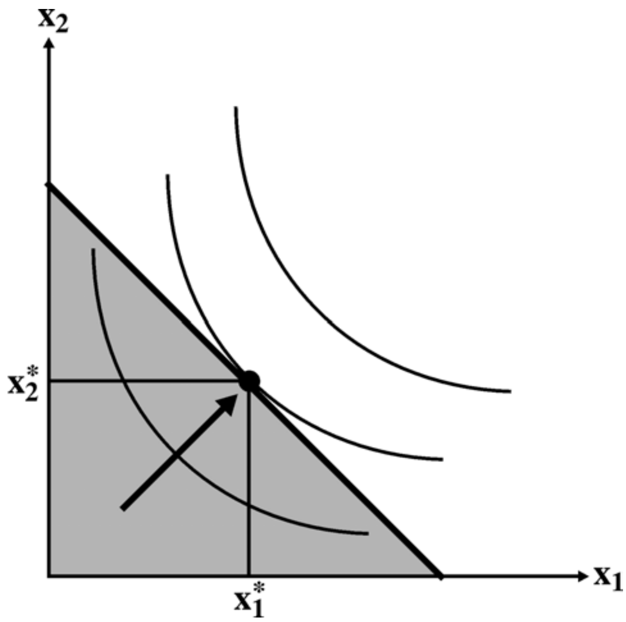
3. lépés: a kiadási függvény definiálása

4. lépés: a kiadási fv. egy tulajdonsága: Shephard-lemma

5. lépés: dualitás

6. lépés: a Szluckij-tétel kimondása és bizonyítása

9.13
Hasznosságmax $\Rightarrow$ marshalli keresleti fv.



$$\max_{x_1, x_2} L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

ERF:

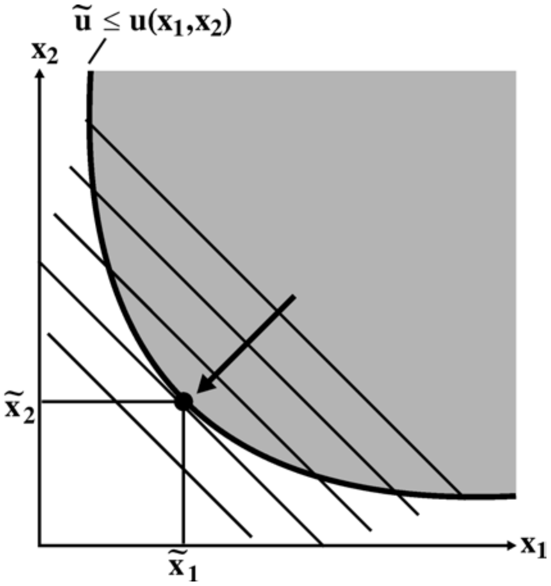
$$\left.\begin{array}{l} x_1 : \dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ x_2 : \dfrac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\lambda : p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0 \quad \Rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_1^* = \tilde{x}_1^*(p_1, p_2, m) \\ x_2^* = \tilde{x}_2^*(p_1, p_2, m) \end{array}\right. \qquad \textbf{marshalli keresleti fv-k}$$

Másképpen: $$\boxed{x_i^M = x_i^M(p_1, p_2, m)}$$

9.14
Kiadásmin $\Rightarrow$ hicksi keresleti fv.



$$\min_{x_1,x_2} L(x_1,x_2,\mu) = p_1x_1 + p_2x_2 - \mu\big(u(x_1,x_2) - \tilde{u}\big)$$

ERF:

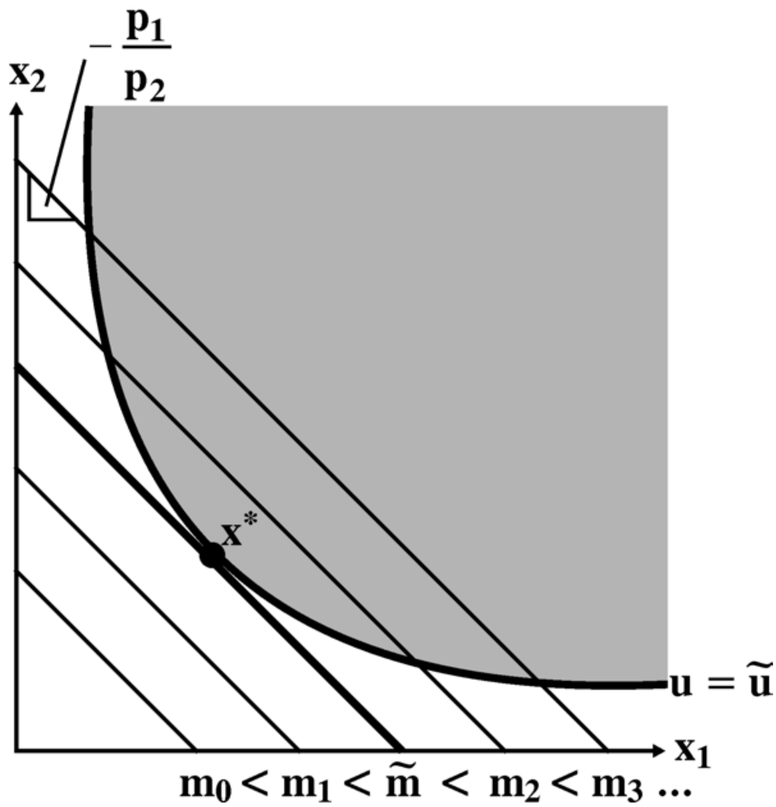
$$\left.\begin{array}{l} x_1 : p_1 - \mu\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \\ x_2 : p_2 - \mu\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\mu : u(x_1,x_2) - \tilde{u} = 0 \qquad \Rightarrow u(x_1,x_2) = \tilde{u}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(p_1,p_2,\tilde{u}) \\ \tilde{x}_2 = \tilde{x}_2(p_1,p_2,\tilde{u}) \end{cases}$$ **hicksi keresleti fv-k**

Másképpen: $\boxed{x_i^H = x_i^H(p_1,p_2,\tilde{u})}$

9.15
A kiadási függvény fogalmának bevezetése



Kiadási függvény:

$$m(p_1, p_2, \tilde{u}) = \left\{ \min p_1 x_1 + p_2 x_2 ,\ \ \tilde{u} \le u(x_1, x_2) \right\} =$$

$$= \left\{ p_1 x_1^* + p_2 x_2^* \mid u = \tilde{u} \right\}$$

9.16
Shephard-lemma

$$\mathbf{m}(p_1, p_2, u) \qquad \text{kiadási függvény}$$

Shephard-lemma:

$$\boxed{\frac{\partial m(p_1, p_2, u)}{\partial p_i} = x_i^H(p_1, p_2, u)}$$

A kiadási függvény ár szerinti parciális deriváltja - feltéve, hogy létezik - egyenlő a megfelelő jószág hicksi keresleti függvényével.

9.17
A Shephard-lemma bizonyítása

- (p_1^0, p_2^0) egy tetszőleges árvektor, u egy rögzített hasznossági szint.

- (x_1^0, x_2^0) a (p_1^0, p_2^0)-hoz és u-hoz tartozó optimális jószágkosár. Ez a kiadásmin. feladat megoldása.

- (p_1, p_2) egy másik $(p_1, p_2) \neq (p_1^0, p_2^0)$ árvektor.

- Definiáljunk egy $f(p_1, p_2)$ segédfüggvényt az alábbiak szerint:
  - $f(p_1, p_2) = p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0 - m(p_1, p_2, u)$,
- ahol $m(p_1, p_2, u)$: a kiadásmin. feladatból származtatott kiadási függvény

- Könnyen belátható, hogy: $f(p_1, p_2) \geq 0$. Miért?

$\left(x_1^0, x_2^0\right)$ nem feltétlenül opt. (p_1, p_2) árak mellett, $m(p_1, p_2, u)$ pedig (p_1, p_2) árak mellett a <u>minimális</u> kiadás.

9.18
A Shephard-lemma bizonyítása (folytatás)

– **Ha viszont $(p_1, p_2) = (p_1^0, p_2^0)$, akkor $f(p_1, p_2)$ <u>felveszi a minimumát</u>: $f(p_1, p_2) = 0$**

– **A minimumpontban azonban: $\partial f(p_1^0, p_2^0) / \partial p_i = 0$ (i=1,2) szükséges feltételek fennállnak.**

– **Írjuk ki:** $$\frac{\partial f(p_1^0, p_2^0)}{\partial p_i} = x_i^0 - \frac{\partial m(p_1^0, p_2^0, u)}{\partial p_i} = 0 \ !$$

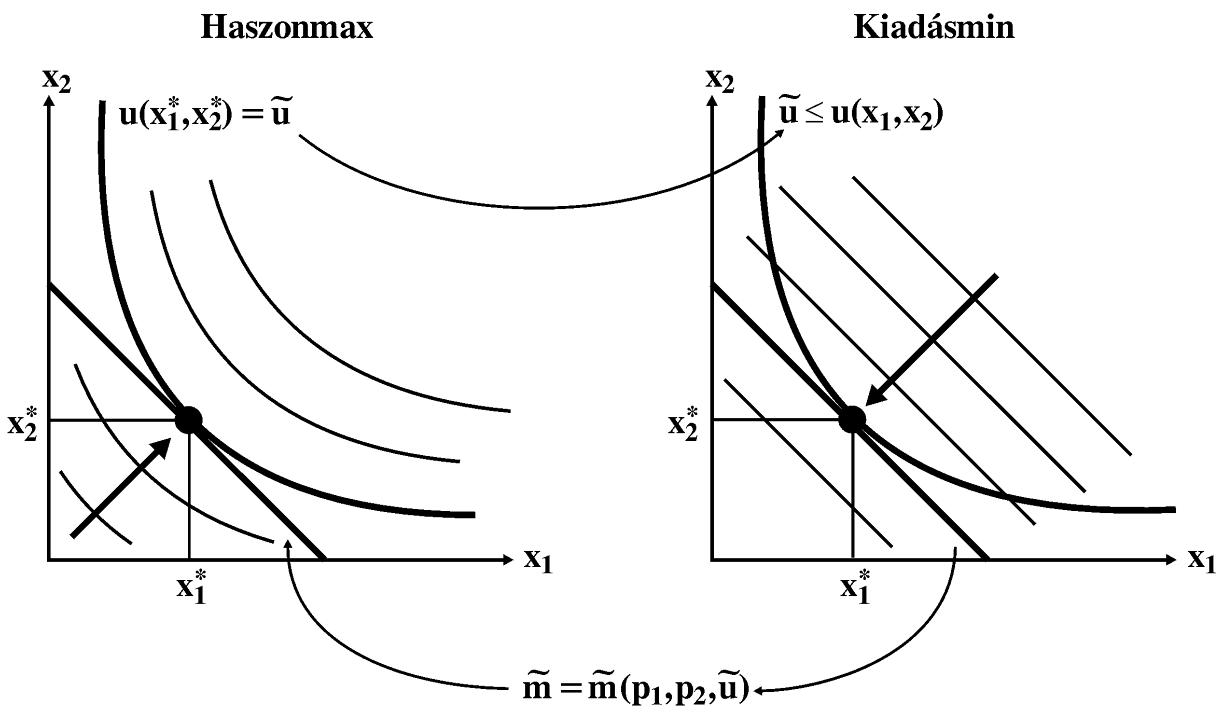
– **Vagyis:** $$\frac{\partial m(p_1^0, p_2^0, u)}{\partial p_i} = x_i^0 .$$

– **Mivel (p_1^0, p_2^0) egy önkényesen megválasztott pont volt, ez tetszőleges (p_1, p_2)-re igaz:**

$$\boxed{\frac{\partial m(p_1, p_2, u)}{\partial p_i} = x_i^H(p_1, p_2, u)}$$

(i=1,2)

9.19
Dualitás



Az $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ **pontban:** $x_i^M(p_1, p_2, \tilde{m}) \equiv x_i^H(p_1, p_2, \tilde{u})$

9.20
A Szluckij-tétel kimondása és bizonyítása

$$x_i^H(p_1, p_2, \tilde{u}) \equiv x_i^M(p_1, p_2, \tilde{m}(p_1, p_2, \tilde{u}))$$

Differenciáljuk tetszőleges p_j (j=1,2) szerint!

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^M}{\partial \tilde{m}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \tilde{m}(p_1, p_2, \tilde{u})}{\partial p_j}}_{= x_j^H \text{ (Shephard lemma)}}$$

Így:

$$\left.\frac{\partial x_i^H}{\partial p_j}\right|_{u=\tilde{u}} = \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i^M}{\partial \tilde{m}}$$

Átrendezve, megkapjuk a Szluckij-egyenletet:

$$\boxed{\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} = \left.\frac{\partial x_i^H}{\partial p_j}\right|_{u=\tilde{u}} - \frac{\partial x_i^M}{\partial \tilde{m}} x_j}$$

(i,j=1,2)

9.21
Szluckij-tétel a mi speciális ($dp_1<0$; p_2, m rögzített) esetünkben

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} = \underbrace{\left.\frac{\partial x_1^H}{\partial p_1}\right|_{u=\tilde{u}}}_{\text{Saját-árhatás}} - \underbrace{\frac{\partial x_1^M}{\partial \tilde{m}} x_1}_{\text{Jövedelemhatás}} \qquad \Leftarrow \qquad x_1^M = x_1^M(p_1, p_2, m)$$

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1} = \underbrace{\left.\frac{\partial x_2^H}{\partial p_1}\right|_{u=\tilde{u}}}_{\text{Keresztárhatás}} - \underbrace{\frac{\partial x_2^M}{\partial \tilde{m}} x_1}_{\text{Jövedelemhatás}} \qquad \Leftarrow \qquad x_2^M = x_2^M(p_1, p_2, m)$$

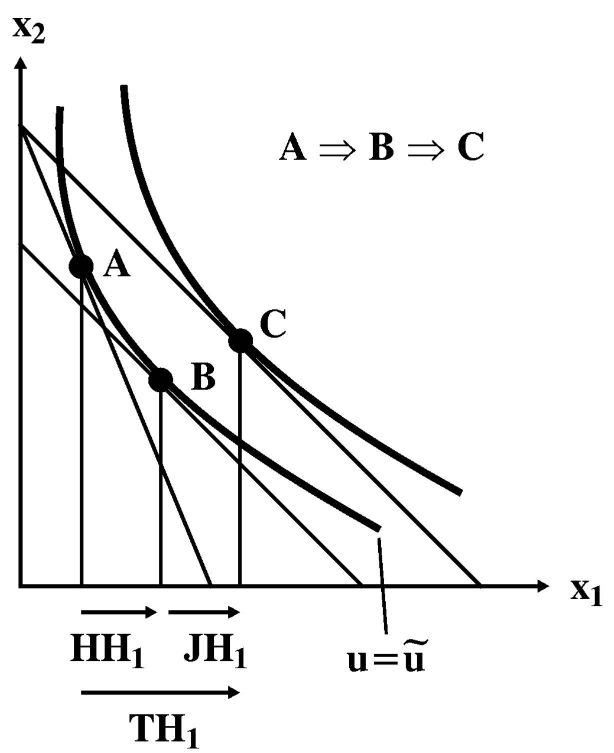
9.22
$dp_1<0$ árváltozás hatása x_1-re

Szorozzuk végig a Szluckij-egyenletet dp_1-gyel!

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}\cdot dp_1 = \left.\frac{\partial x_1^H}{\partial p_1}\right|_{u=\tilde{u}}\cdot dp_1 - \frac{\partial x_1^M}{\partial \tilde{m}}\cdot \underbrace{x_1\cdot dp_1}_{=d\tilde{m}<0!}$$

vagyis:

$$\underbrace{\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}\cdot dp_1}_{TH_1} = \underbrace{\left.\frac{\partial x_1^H}{\partial p_1}\right|_{u=\tilde{u}}\cdot dp_1}_{HH_1} - \underbrace{\frac{\partial x_1^M}{\partial \tilde{m}}\cdot d\tilde{m}}_{JH_1}$$



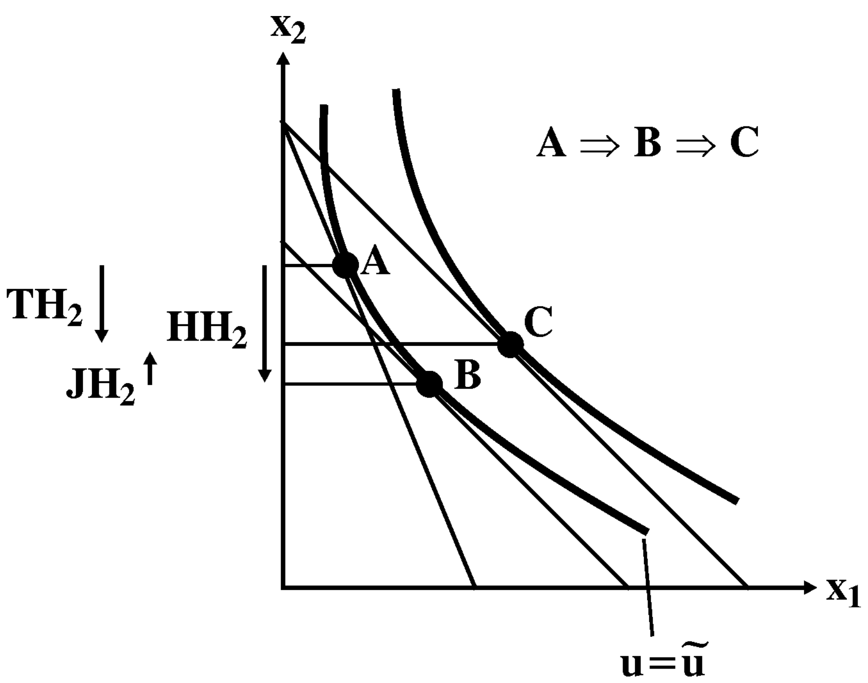
9.23
$dp_1<0$ árváltozás hatása x_2-re

Szorozzuk végig a Szluckij-egyenletet dp_1-gyel!

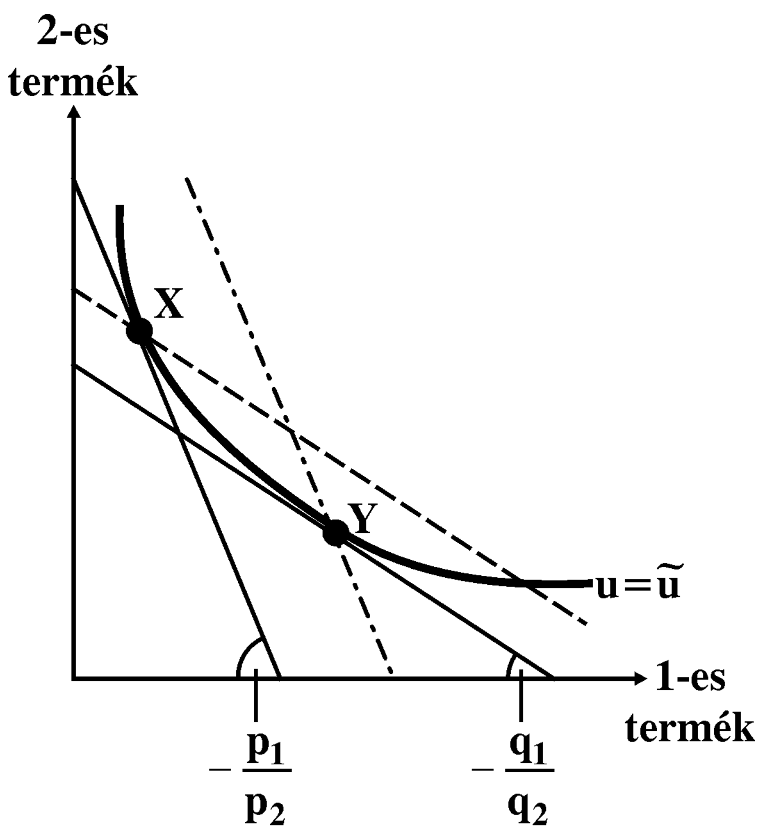
$$\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1}\cdot dp_1 = \left.\frac{\partial x_2^H}{\partial p_1}\right|_{u=\tilde{u}}\cdot dp_1 - \frac{\partial x_2^M}{\partial \tilde{m}}\cdot \underbrace{x_1\cdot dp_1}_{=d\tilde{m}<0!}$$

vagyis:

$$\underbrace{\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1}\cdot dp_1}_{TH_2} = \underbrace{\left.\frac{\partial x_2^H}{\partial p_1}\right|_{u=\tilde{u}}\cdot dp_1}_{HH_2} - \underbrace{\frac{\partial x_2^M}{\partial \tilde{m}}\cdot d\tilde{m}}_{JH_2}$$



9.24
A saját helyettesítési hatás előjele mindig ellentétes az árváltozás előjelével



9.25
A saját helyettesítési hatás előjele mindig ellentétes az árváltozás előjelével (folytatás)

Vektorokkal:

$$\mathbf{px} \le \mathbf{py}$$
$$\mathbf{qy} \le \mathbf{qx}$$

Összeadva és átrendezve:

$$(\mathbf{q}-\mathbf{p})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \le 0$$

Komponensekre bontva:

$$(q_1 - p_1)(y_1 - x_1) + (q_2 - p_2)(y_2 - x_2) \le 0$$

Ha csak az egyik termék ára változik (vagyis, ha $q_2 = p_2$):

$$(q_1 - p_1)(y_1 - x_1) \le 0.$$

Általánosabban:

$$\Delta p_i \Delta x_i \big|_{u=\tilde{u}} \le 0$$

Átrendezve és határértékre nézve:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta p_i}\bigg|_{u=\tilde{u}} = \frac{\partial x_i^H}{\partial p_i}\bigg|_{u=\tilde{u}} \le 0$$

$$\boxed{\frac{\partial x_i^H}{\partial p_i}\bigg|_{u=\tilde{u}} \le 0}$$