

7. előadás

EGYÉNI DÖNTÉS

Kertesi Gábor

Varian 5. fejezete változtatásokkal; kiegészítve a kiadásminimalizálási probléma tárgyalásával. Az előadás nem érinti az adók megválasztásának problémáját (Varian 5.6 alfejezete); ezt a szemináriumon kell átvenni.

7.1 Bevezető megjegyzések

- Az elmúlt két hét során a fogyasztói döntés két elemét vizsgáltuk meg tüzetesebben: a költségvetési halmazt, amely a fogyasztó által megvalósítható *lehetőségeket* reprezentálja, illetve a fogyasztó preferenciáit leíró közömbösségi térképet, illetve a közömbösségi térképhez rendelt hasznossági függvényt. Most arra teszünk kísérletet, hogy e két alkotóelemet összerakva, levezessük a fogyasztó optimális döntését: a fogyasztó által választott optimális jószágkosarat.

7.2 Optimális egyéni döntés: a hasznosságmaximalizálási probléma grafikus megoldása

- Korábban már említettük, hogy a fogyasztói döntés közgazdasági modelljében az emberek a számukra megfizethető legjobb jószágkosarat választják. Ez az állítás nyilvánvalóan azt jelenti, hogy racionálisan döntenek: a legjobbat akarják maguknak biztosítani, de tekintettel vannak a realitásokra is. Az előző két héten tanult fogalmakra támaszkodva, most szakszerűbben újrafogalmazhatjuk ezt a tételt: a fogyasztó a költségvetési halmazból kiválasztja az általa legtöbbre értékelt jószágkosarat. Eleveítsük hát fel döntésének e két elemét: a költségvetési halmazt és a preferenciáit leíró közömbösségi térképet.

7.1 fólia

- A *költségvetési* halmaz reprezentálja a fogyasztó számára megvalósítható jószágkosarokat. A költségvetési halmaz belső pontjai azokat a jószágkosarokat reprezentálják, amely mellett a fogyasztónak (adott árakat feltételezve) még maradna elköltetlen jövedelme; a költségvetési halmazt határoló költségvetési egyenes pontjai pedig azokat, melyeknek realizálása esetén a fogyasztó a rendelkezésére álló teljes jövedelmét elköltötte. A költségvetési halmazon kívül eső jószágkosarokat – minthogy a fogyasztó számára nem megvalósítható lehetőségeket képviselik – a probléma elemzéséből kizárhatjuk.

7.2 fólia

- Most rakjuk össze a fogyasztói döntés e két elemét: a költségvetési halmazt és a preferenciákat leíró közömbösségi térképet. A költségvetési halmazon belül keressük azt a jószágkosarat, amely a fogyasztó számára a legmagasabb hasznossági szintet képviseli.

7.3 fólia

- Ez a jószágkosár nyilvánvalóan a költségvetési halmazon belül található legmagasabban fekvő közömbösség görbén helyezkedik el. Ha az ábrán (a nyíl irányát követve) D-Ny-i irányból É-K-i irányba haladunk, egyre magasabb hasznossági szinteket jelentő közömbösségi görbékhez jutunk. A költségvetési halmazon belül a legmagasabb hasznossági szintet **annál a közömbösségi görbénél** érjük el, amely a költségvetési halmazt határoló **költségvetési egyenest éppen érinti**. Az érintési ponthoz tartozó jószágkosár (x_1^*, x_2^*) eleget tesz az optimális döntés mindkét kritériumának: **megvalósítható** (vagyis a költségvetési halmazon belül van), és a megfizethető jószágkosarok közül a fogyasztó számára a **legjobb**.

- Az optimális jószágkosár rendelkezik tehát egy fontos tulajdonsággal: a fogyasztói optimumban a közömbösségi görbe **érinti** a költségvetési egyenest. Könnyen belátható, hogy ennek így kell lennie.

7.4 fólia

- Ha a közömbösségi görbe nem érintője lenne, hanem metszené a költségvetési egyenest (A pont), akkor lennének olyan pontok a költségvetési egyenesen (ilyenek az AD szakasz pontjai), amelyek mind a szóban forgó közömbösségi görbe *fölött* helyezkednek el. Bárhonnan indulunk is el az A pontot tartalmazó közömbösségi görbétől keleti irányba – mondjuk a B pontból kiindulva C felé –, az A pontot is tartalmazó közömbösségi görbénél magasabb hasznossági szintet képviselő közömbösségi görbéhez jutnánk el. Ez nyilvánvalóan a preferenciák monotonitásának a következménye: mivel $A \sim B$ és $C \succ B$, ezért $C \succ A$.
- Vajon minden esetben teljesülnie kell-e az érintési feltételnek az optimális döntés során? Nem minden esetben. Előfordulhatnak olyan esetek is, amikor a fogyasztói optimum pontjában nem teljesül az érintőfeltétel; és bizonyos esetekben az érintőfeltétel teljesülése, noha szükséges, de nem elégséges ahhoz, hogy a fogyasztó megtalálja a számára megfizethető legjobb jószágkosarat. Mindazonáltal a **legjellegzetesebb, legérdekesebb** esetekben az érintési feltételnek teljesülnie kell, és ezekben az esetekben az érintőfeltétel egyben elégséges is a fogyasztói optimum meghatározásához. Mindig igaz azonban, hogy az optimális pontot tartalmazó közömbösségi görbe nem metszheti a költségvetési egyenest.
- A továbbiakban előbb e legjellegzetesebb, legérdekesebb eset tulajdonságait fogjuk kifejteni, s csak ezt követően (az előadás végén) térünk ki a kivételnek számító esetekre. E „jellegzetes” eset a fogyasztói döntés azon eseteit foglalja magában, amikor a fogyasztó jól viselkedő (**monoton és konvex**) preferenciákkal rendelkezik, és az optimális jószágkosár a költségvetési egyenes **belső** pontjainak valamelyikére esik¹.
- Térjünk vissza tehát e jellegzetes eset fontos tulajdonságához: az érintési feltételhez! Az érintési feltétel algebrailag azt jelenti, hogy a fogyasztó számára megfizethető legjobb jószágkosárhoz tartozó közömbösségi görbe érintője megegyezik a költségvetési egyenes meredekségével. Más szóval: az optimális jószágkosár esetében a fogyasztó szubjektív értékelését kifejező **helyettesítési határárány megegyezik a termékek árarányával** (ami e termékek objektív piaci értékelését fejezi ki).

7.5 fólia

- Hogy az érintőfeltétel közgazdasági jelentését mélyebben megértsük, érdemes lesz még egyszer szemügyre vennünk azt a kérdést, hogy miért nem adhat optimális megoldást a költségvetési egyenes és egy azt metsző közömbösségi görbe metszéspontja. Tekintsük a 7.6 fóliát.

7.6 fólia

¹ **Nem** pedig a költségvetési egyenes és a koordinátatengelyek valamelyikének metszés-pontjára (a költségvetési egyenes **szélső** pontjainak valamelyikére) esik. A főszövegben szereplő jellegzetes esetet **belső optimumnak/megoldásnak**, az e helyütt említett kivételes esetet **szélső optimumnak/megoldásnak** (vagy **sarokoptimumnak/-megoldásnak**) nevezik.

- Az ábrán az optimális döntésnek megfelelő érintési pont (C) mellett két metszéspontot tüntettünk fel: A-t és B-t. Az érintési pont tulajdonságát már ismerjük: az arány és a helyettesítési határárány megegyezik. Vizsgáljuk meg közelebbről a metszéspontok tulajdonságait! Az A metszésponthoz tartozó jószágkosár esetében a fogyasztó helyettesítési határáránya *nagyobb*, mint az x_1 és x_2 termék aránya. Mit jelent ez? Azt jelenti, hogy a fogyasztó A jószágkosár birtokában *többre értékeli* az x_1 terméket az x_2 termékhez képest annál, mint amennyiért e két terméket a piacon egymásra tudná cserélni. Vagyis ésszerű, ha úgy dönt, hogy a birtokában levő x_2 terméknek egy részét a piacon x_1 -re cseréli. Az érintőfeltétel mögött tehát egy **viselkedési szabály** húzódik meg. Ez a szabály azt mondja ki: ha racionálisan viselkedsz, addig változtatod a birtokodban levő jószágkosár összetételét piaci cserék révén, amíg e cserékkal jól jársz. Ha egy jószág pótlólagos egysége a többi jószág pótlólagos egységéhez képest *számodra* több értéket képvisel, mint amibe az a piacon kerül ($|MRS| > p_1/p_2$), akkor vegyél többet belőle, és szabadulj meg a számodra relatíve értéktelenebb termék egy részétől. Ha fordított a helyzet – lásd a B ponthoz tartozó esetet, ahol is $|MRS| < p_1/p_2$ –, akkor fordítva cselekedj: vegyél többet x_2 -ből, és szabadulj meg x_1 készleted egy részétől!
- Az előnyös piaci cserelehetőségeket – a pénzügyi piacokon szokásos tranzakciók analógiájára – arbitrázslehetőségeknek² szokták nevezni. A fogyasztói optimum állapota az az állapot, amikor a fogyasztó a számára előnyös cserelehetőségeket már mind kiaknázza: további arbitrázsra már nincs lehetősége.

7.3 Az érintőfeltétel következményei

- Jól szervezett piacokon tipikus, hogy mindenki ugyanazzal a termékárral szembesül. Vegyünk, mondjuk, két terméket: a tejet és a vaját. Ha mindenki ugyanazon áron vásárolja a tejet, és ugyanazon az áron vásárolja a vaját³, akkor a tej és a vaj közötti helyettesítési határárány minden fogyasztó esetében ugyanaz lesz. Ez egyenesen következik az előbbi elemzésből. Ha a piac mindenki számára ugyanazt a cserearányt kínálja a két termék között, akkor *mindenki* addig változtatja jószágkosarának összetételét, amíg a két jószágra vonatkozó saját szubjektív határértékelése egyenlő nem lesz azzal, ahogy a piac objektíve értékeli a két terméket.
- Ebben az állításban most az az érdekes, hogy független a jövedelmektől és a preferenciáktól. Tekintsük a 7.7 fóliát. Ezen az ábrán három *különböző* egyén (i , j és k) optimális fogyasztói döntését ábrázoltuk. Mindhárman *ugyanazzal az árral* szembesülnek, ám egymástól lényeges tulajdonságaikban különböznek: i és k preferenciái megegyeznek, de k jövedelme magasabb, mint i -é; i -nek és j -nek viszont a jövedelmei azonosak, de a két jószággal kapcsolatos ízlései különböznek⁴.

7.7 fólia

² Az „arbitrázs” szó eredeti jelentése: olcsón venni bizonyos értékpapírokat, és drágábban eladni.

³ Továbbá, ha minden vevő optimuma belső megoldás eredményeként határozódik meg (lásd az 1. lábjegyzetet, valamint az előadás vége felé ismertetett sarok- (vagy szélső) megoldást).

⁴ Melyikük szereti jobban az egyik vagy a másik terméket?

- Noha a három ember optimális jószágkosara egymástól igencsak különbözik, a **helyettesítési határárányok mindegyikük számára azonosak**. A két jószág minden fogyasztójának egyet kell értenie abban, hogy mennyire értékeli az egyiket a másikhoz képest: mennyit lenne hajlandó feláldozni azért, hogy a másiktól egy kicsivel többje legyen.
- Mivel az árak kifejezik azt az arányt, amelyen az emberek hajlandóak elcserélni az egyik jószágot a másikra, felhasználhatók olyan javaslatok értékelésére, amelyek megváltoztatnák a fogyasztást.
- **Tej-vaj példa.** Tegyük fel, hogy 1 liter tej és egy 25 dekás darab vaj piaci ára éppen egyenlő egymással. Ekkor, ha valaki előhozakodik egy olyan technológiai újítással, amely 1 és $\frac{1}{4}$ liter tejből lenne képes 25 dkg vaját előállítani, akkor ezért a találmányért nem fognak tolongani a kivitelezők. Miért? Mert 25 dkg vaját olcsóbban (1 liter tej áráért) is megkaphatunk a piacon: $4:5 < |MRS| = p_{vaj} / p_{tej} = 1:1$. Ez a találmány nem kell senkinek. Miért lenne bárki is hajlandó 4 darab vajért 5 liter tejet feláldozni, amikor az csak 4 liter tejet ér meg neki? Ha viszont a feltaláló ezen nekibuzdulva, addig tökéletesíti a találmányát, hogy már $\frac{3}{4}$ liter tejből is képes lenne 25 dkg vaját előállítani, akkor arra könnyen találna profitorientált kivitelezőt. Miért? Mert olcsóbban lehet az új technológia révén vaját előállítani, mint amennyiért az a piacon kapható: $4:3 > |MRS| = p_{vaj} / p_{tej} = 1:1$. Ez a találmány *azért kelendő, mert az emberek többre értékelik az outputot, mint az inputot*.
- Az árak tehát nem önkényes számok: **az árak az embereknek a javak határegységeire vonatkozó értékítéleteit tükrözik**. Ez a megállapítás egyike a közgazdaságtan legalapvetőbb és legfontosabb gondolatainak.

7.4 Optimális egyéni döntés: a haszonmaximalizálási probléma algebrai megoldása

- Hasznos lesz, ha az optimális egyéni döntés meghatározásához tartozó problémát algebrai eszközökkel is képesek vagyunk megfogalmazni és megoldani. Mindenekelőtt fogalmazzuk meg az eddigieknél precízebben, matematikai fogalmak segítségével a problémát.

7.8 fólia

- Jól látható, hogy a megoldandó probléma – matematikai jellegét tekintve – nem más, mint egy **feltételes szélsőérték-feladat**. Egy kétváltozós⁵ függvény maximumához tartozó argumentumértékeket keressük azon feltétel mellett, hogy a függvény értelmezési tartományából csak egy bizonyos részhalmazt veszünk figyelembe. A preferenciákat leíró hasznossági függvény maximumát keressük a költségvetési halmaz felett abból a célból, hogy e feltételes szélsőérték-feladat megoldásával megtaláljuk a költségvetési halmazon belül azt a pontot (jószágkosarat), amelyhez ilyen feltételek mellett a legmagasabb hasznossági érték tartozik. Magyarán: a megfizethető jószágkosarak közül a számunkra legjobb jószágkosarat szeretnénk meghatározni.

⁵ Általános esetben: n -változós.

- Mikroökonómiai tanulmányaik befejeztével, egy év elteltével minden bizonytalansággal (egyetemi tanulmányaik befejeztével pedig egészen bizonyosan) maguk is megállapítják: **a közgazdasági problémák túlnyomó többségének éppen ilyen a szerkezete.** Minden (vagy csaknem minden) jól meghatározott közgazdasági probléma szerkezete – ha alkotóelemeire csupaszítjuk – így fest: adva van a gazdaság egy szereplője (fogyasztó, vállalat, munkavállaló, részvényes stb.), akit bizonyos célokkal ruházunk fel, amit el akar érni (ugyanúgy, ahogy a fogyasztót a hasznosságmaximalizálás céljával). E célok megvalósításának azonban a lehetőségek határt szabnak. A költségvetési halmazzal analóg módon a legtöbb közgazdasági probléma esetében definiálnunk kell bizonyos korlátozó feltételeket, amelyeken *belül* igyekszik a gazdasági szereplő (bárki legyen is az) céljait a számára lehető legjobb módon megvalósítani. A közgazdasági problémák csaknem teljes spektruma nem más, mint variációk végtelen változatosságban a célok és a korlátozó feltételek témájára. Ezért igen fontos, hogy jól értsük az ilyen természetű modellek **prototípusát: a fogyasztói döntés modelljét.** Ha ezt jól értjük, nem okoz majd gondot az ennek analógiájára felépített számtalan egyéb modell megértése sem.
- A fogyasztói optimum meghatározásához felállított haszonmaximalizálási problémát algebrailag kétféleképpen oldhatjuk meg: (a) gyalogos módon, a **behelyettesítés módszerével.** Ekkor a korlátozó feltétel egyenletét behelyettesítjük a célfüggvénybe, és a kétváltozós feltételes szélsőérték-feladatot úgy oldjuk meg, mintha egyváltozós, feltétel nélküli szélsőérték-feladat lenne; (b) **Lagrange-módszerrel**, mellyel Simonovits tanár úr előadásán ismerkedhettek meg először, szemináriumon remélhetőleg sokat gyakorolták, és matekból pedig ebben a félévben ismételten tanulni fogják. E helyütt (a gyakorlás kedvéért) mindkét módszert alkalmazni fogjuk. A tanév további részében azonban kizárólag a Lagrange-módszert fogjuk alkalmazni. Lássuk előbb a behelyettesítés módszerét!

7.9 fólia

- Most lássuk a Lagrange-módszert!

7.10 fólia

- A Lagrange-módszer több szempontból is fölényben van a behelyettesítés módszerével szemben: (a) kettőnél több változó esetében a behelyettesítés módszere nem alkalmazható; (b) a közgazdasági elméleti tételek bizonyításához – mint majd látni fogjuk – sok esetben a Lagrange-módszer alkalmazásán keresztül vezet az út; (c) a Lagrange-szorzonak igen fontos közgazdasági jelentése van: azt fejezi ki, hogy a célfüggvény értékében mérve, milyen marginális hasznunk származik abból, ha a döntési probléma korlátozó feltételét egységnyi mértékben tágítjuk. A fogyasztói döntés problémájánál maradva: a Lagrange-szorzó értéke azt fejezi ki, hogy milyen marginális hasznunk származik abból, ha a jövedelemkorlátunkat egységnyivel tágítjuk. A Lagrange-szorzó tehát (ez esetben) nem más, mint a jövedelem határhaszna: $\lambda = \partial u / \partial m$. Ennek bizonyítását általános esetben, a 2. előadás során Simonovits tanár úr megadta; a fogyasztói döntés speciális esetében pedig a szemináriumon tárgyalni fogják.

7.5 A hasznosságmaximalizálási probléma tükörképe: a kiadásminimalizálási probléma

- Az optimális fogyasztói döntés problémáját mind ez ideig hasznosságmaximalizálási problémaként tárgyaltuk. A számunkra megfizethető jószágkosarak közül a legjobbat próbáltuk meghatározni. A problémát azonban egy *másik szemléletben* is tárgyalhatjuk. Tegyük föl, hogy a fogyasztó kijelöl egy hasznossági szintet, amelynél kevesebbel nem kívánja beérni, és azt a kérdést teszi fel, hogy mi az a minimális összeg, amivel erre a hasznossági szintre még képes eljutni. A kétfajta szemlélet jól rímel az ismert vásárlási dilemmára: (a) a zsebünkben levő pénzüsszeget hogyan lehet a legjobban elkölteni? – **hasznosságmaximalizálás**; (b) valamely rögzített vágyunkat⁶ hogyan tudjuk a legkisebb kiadásból megvalósítani – **kiadásminimalizálás**. A két probléma nyilvánvalóan egymás tükörképe.
- Fogalmazzuk meg a kiadásminimalizálási problémát precízebben! A fogyasztó kijelöl egy általa minimálisan elfogadható hasznossági szintet, melynél kevesebbel nem kívánja beérni.

7.11 fólia

- Kiadásainkat, adott arányok mellett, nyilván úgy csökkenthetjük, hogy egyre kisebb pénzüsszeget áldozunk a fogyasztásunk tárgyát képező javakra.

7.12 fólia

- Kiadásaink minimalizálásának az szab határt, hogy egy rögzített hasznossági szint alá azért nem szeretnénk kerülni. A minimális kiadási szint, amely még elegendő ahhoz, hogy előre kijelölt $\tilde{u} \leq u$ hasznossági szintünket elérjük, ott lesz, ahol e rögzített hasznossági szintnek megfelelő közömbösségi görbét a minimális kiadási szintünket reprezentáló egyenes érinti. Az érintési ponthoz tartozó jószágkosár (x_1^*, x_2^*) eleget tesz az optimális döntés mindkét kritériumának: benne van az elfogadható hasznossági értékek tartományában; és a lehető legkisebb kiadást igényli. Az érintési pontban az érintőfeltétel jól ismert tulajdonsága teljesül: a fogyasztó szubjektív értékelését kifejező helyettesítési határárány és a piac objektív értékítéletét kifejező árárány megegyezik.

7.13 fólia

- Vajon a kiadásminimalizálási probléma megoldásaként kapott optimális jószágkosár egybeesik-e azzal az optimális jószág-kosárral, amelyhez a hasznosságmaximalizálási probléma megoldásának eredményeképpen eljutottunk? **Nem feltétlenül**. De ha gondoskodunk arról, hogy a hasznosságmaximalizálási probléma felállításakor megállapított jövedelemszint értékét (a hasznosságmaximalizálási probléma paraméterét) összhangba hozzuk a kiadásminimalizálási probléma felállításakor megállapított hasznossági küszöbértékkel (a kiadásminimalizálási probléma paraméterével), a két feladat megoldása egybeesik. Erről a fontos kérdéstről két hét múlva, a Szluckij-tétel kapcsán sok szó esik majd.

⁶ Az analógia itt egy kicsit sántít, hiszen a kiadásminimalizálásnál nem egy természetes terminusokban megfogalmazott célt rögzítünk, hanem a hasznossági függvény egy alsó küszöbértékét.

- A kiadásminimalizálási feladatot – a hasznosságmaximalizálási feladattal analóg módon – megfogalmazhatjuk feltételes szélsőérték-feladatként.

7.14 fólia

- E feltételes minimumfeladatot Lagrange-módszerrel az alábbiak szerint oldhatjuk meg.

7.15 fólia

- A kiadásminimalizálási problémát lezáró megjegyzés: a szóban forgó problémát nem kuriózumként (vagy a diákok gyötrése céljából) vezettük elő. A hasznosságmaximalizálási probléma tükörképét jelentő kiadásminimalizálási problémának – mint majd két hét múlva látni fogjuk – igen nagy elméleti jelentősége van: a fogyasztási elmélet legnagyobb hatású tételéhez, a Szluckij-tételhez adja meg a kulcsot.

7.6 Kivételek: amikor az optimumban nem teljesül az érintőfeltétel, vagy teljesül, de az nem elégséges az optimumhoz

- Térjünk most vissza ahhoz a problémához, hogy mely esetekben juthatunk az érintőfeltétel teljesülése nélkül optimális megoldáshoz, illetve, hogy melyek azok az esetek, amikor az érintőfeltétel teljesülése szükséges ugyan, de nem elégséges az optimum meghatározásához.
- Vegyük előbb azokat az eseteket, **1. amikor az optimumban nem teljesül az érintőfeltétel. (1a)** Elképzelhető, hogy a közömbösségi görbének *nincs is érintője az optimális pontban*. Ha, mint az alábbi esetben, a közömbösségi görbének az optimális fogyasztási kosár pontjában töréspontja van, az érintő meghatározatlan. Ebben az esetben a preferenciarendezéshez tartozó *hasznossági függvény nem differenciálható az optimumban*.

7.16 fólia

- A fenti eset egy speciális a esetével már az eddigiek során is találkoztunk: a tökéletes kiegészítő javak esetében a preferenciák töréspontot tartalmaznak, és az optimum épp a töréspontban van.

7.17 fólia

- **(1b)** Egy másik (és elméleti szempontból érdekesebb) eset az, *ha a fogyasztói optimum pontjában* valamilyen oknál fogva *egy termék fogyasztása nulla*, vagy hogy a grafikusán megjeleníthető kéttermékes modellnél maradjunk: az optimumban az egyik termék fogyasztása nulla.

7.18 fólia

- Ebben az esetben az optimális jószágkosár pontja nem a költségvetési egyenes *belső* pontjainak valamelyikére, hanem a költségvetési egyenes és a koordinátatengelyek valamelyikének metszéspontjára esik. Mivel a fogyasztói döntés problémájának

megoldása ilyenkor a költségvetési egyenes egyik *szélső* pontjára (vagy a költségvetési halmaz egyik sarokpontjára) esik, az ilyen megoldást *sarokmegoldásnak* vagy *szélső optimumnak* szokták nevezni. (A jellegzetes esetet, amikor a optimális megoldás a költségvetési egyenes belső pontjainak valamelyikére esik, *belső megoldásnak*, vagy *belső optimumnak* szokták nevezni. Ott természetesen teljesül az érintőfeltétel.)

- Vegyük észre, hogy szélső optimumot vagy sarokmegoldást a fólián ábrázolt esetben egyszerűen csak azért kapunk, mert a költségvetési halmaz meghatározásakor nem engedjük meg, hogy az x_2 jószágból negatív fogyasztásunk legyen. A közömbösségi görbék meredeksége a pozitív térnegyed minden pontjában nagyobb, mint a költségvetési egyenesé. Természetesen akkor is sarokmegoldást kapnánk, ha a közömbösségi görbék meredeksége a pozitív térnegyed minden pontjában kisebb lenne, mint a költségvetési egyenesé. Ez esetben az optimum a költségvetési halmaz másik sarkában lenne.
- A tökéletes helyettesítés esetében általában éppen ilyen helyzet áll elő. Kivéve természetesen azt a speciális helyzetet, amikor a közömbösségi görbék – melyek jelen esetben egyenesek – meredeksége éppen megegyezik a költségvetési egyenesével.

7.19 fólia

- Sarokmegoldást kapunk abban az esetben is, ha konkáv preferenciákkal van dolgunk. Ez érthető, hiszen a konkáv preferenciák sajátossága éppen az, hogy a szélsőségeket előnyben részesítjük az átlagokkal szemben. (Hogyan lehetne ezt bizonyítani?). A konkáv preferenciák igen alkalmas eszközök arra, hogy a közgazdasági problémák egy igen fontos típusát – a specializáció előnyeit – modellezzük velük. Erről a kérdésről majd a második félévben lesz szó.

7.20 fólia

- **2.** Végezetül az is elképzelhető, hogy az optimumban teljesül ugyan az érintőfeltétel, de nemcsak az optimális döntés pontjában teljesül. Ilyenkor **az érintőfeltétel teljesülése az optimum szükséges, de nem elégséges feltétele**. Ilyen példát látunk az alábbi fólián.

7.21 fólia

- Ez a példa rávilágít a konvex preferenciák fontosságára is. Konvex preferenciák esetén minden olyan pontnak, amely kielégíti az érintési feltételt, optimális pontnak kell lennie. Geometrialag világos, hogy miért: a konvex közömbösségi görbék a költségvetési egyenestől elhajlanak, nem görbülhetnek vissza, hogy újra érintsék azt.
- **Kérdés** otthoni gondolkodásra: Milyen esetben lehetséges, hogy az érintőfeltétel teljesülése szükséges és elégséges is, mégis több optimális jószágkosarunk van?

7. előadás

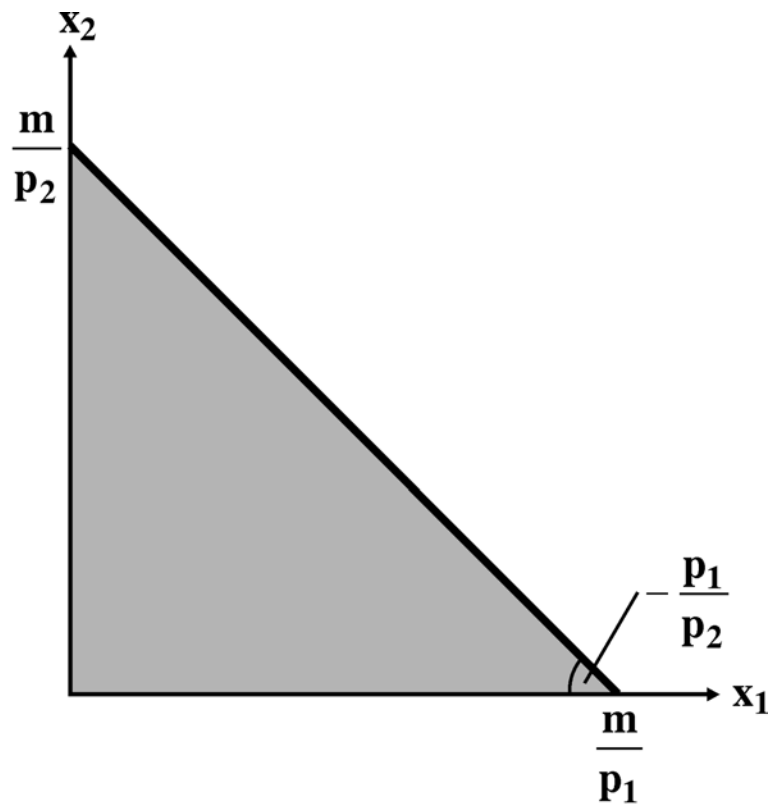
EGYÉNI DÖNTÉS

MELLÉKLET

Kertesi Gábor

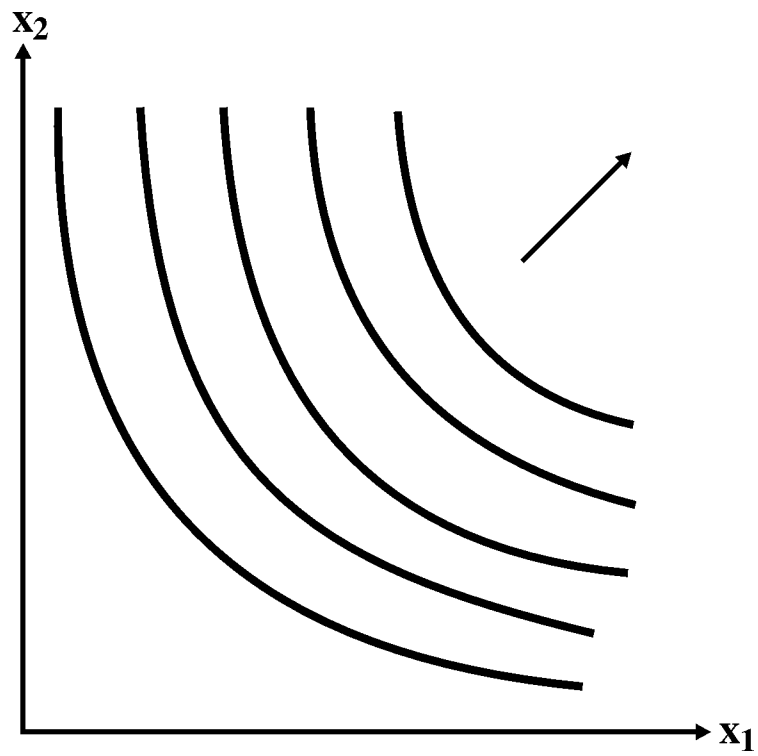
7.1

Költségvetési halmaz

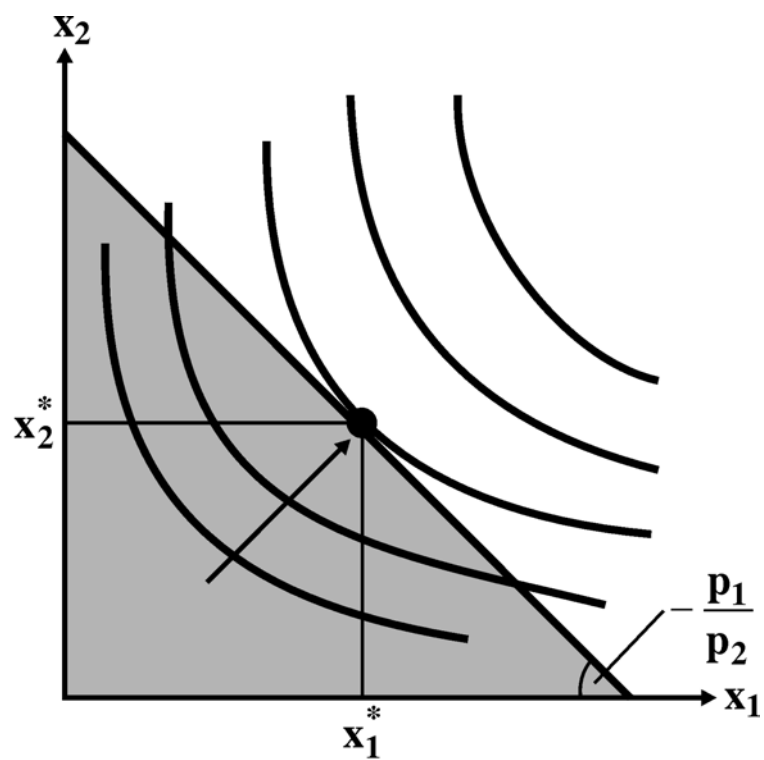


$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7.2 Preferenciák

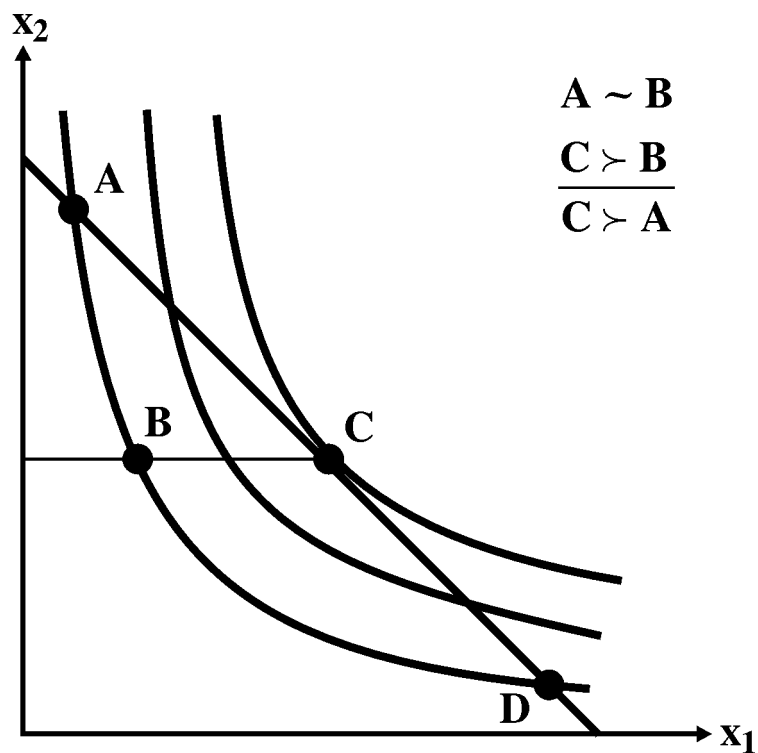


7.3 Optimális fogyasztói döntés

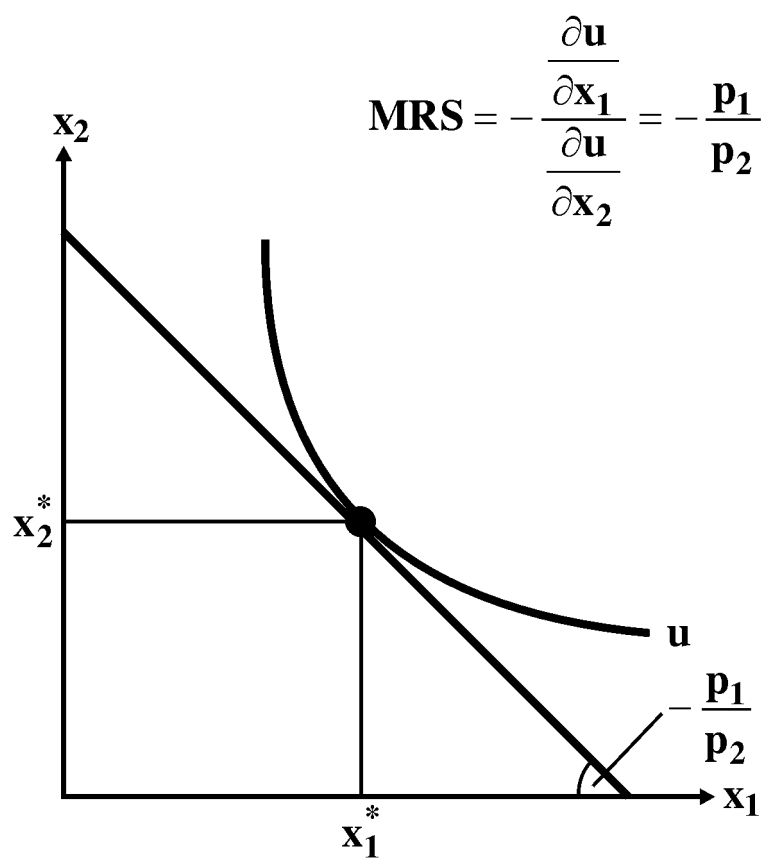


7.4

**A költségvetési egyenes és egy azt metsző
közömbösségi görbe metszéspontja nem
adhat optimális megoldást**

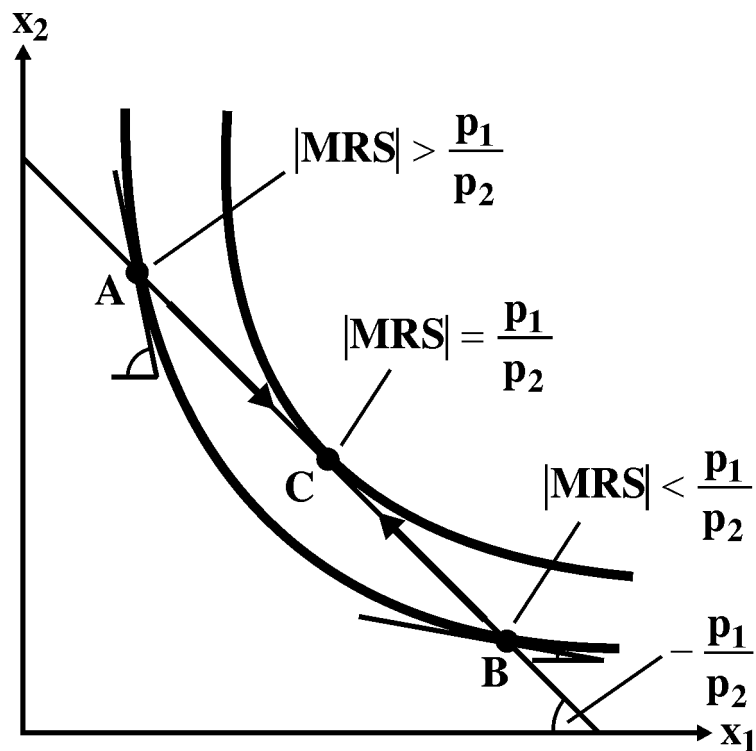


7.5 Az érintőfeltétel



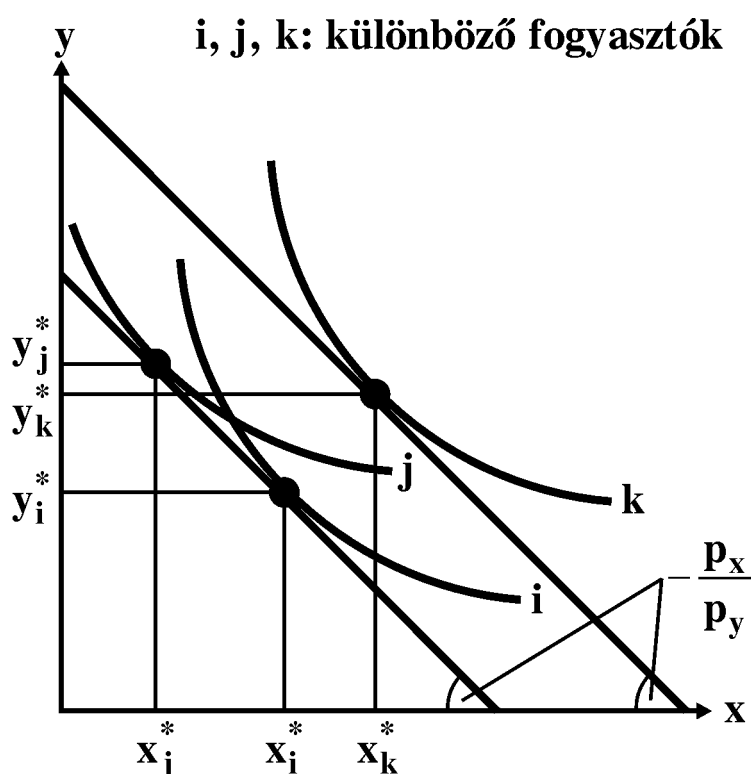
7.6

Az érintőfeltétel közgazdasági jelentése



7.7

A helyettesítési határárány minden fogyasztó számára azonos a fogyasztói optimumban (jövedelemtől és preferenciáktól függetlenül)



Mivel:

$$\left. \begin{aligned} MRS_{xy}^i &= -\frac{p_x}{p_y} \\ MRS_{xy}^j &= -\frac{p_x}{p_y} \\ MRS_{xy}^k &= -\frac{p_x}{p_y} \end{aligned} \right\}$$

ezért: $MRS_{xy}^i = MRS_{xy}^j = MRS_{xy}^k$

7.8

A hasznosságmaximalizálási probléma

Keressük azt az (x_1^*, x_2^*) optimális jószágkosarat,

amelynél az $u(x_1, x_2)$

hasznossági függvény felveszi a maximumát, a

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

korlátozó feltételek mellett.

Rövidített jelölésmóddal:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$

$$\text{kf} : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

$u(x_1, x_2)$: célfüggvény

kf: korlátozó feltétel

7.9

A hasznosságmaximalizálási probléma megoldása behelyettesítéses módszerrel

A hasznosságmaximalizálási probléma:

$$\left. \begin{array}{l} \max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) \\ \text{kf : } p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Helyettesítsük be a költségvetési egyenes egyenletét a hasznossági függvénybe!

$$\max_{x_1} u\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} \cdot x_1\right) \quad (2)$$

Vegyük észre, hogy $x_2 = x_2(x_1)$! A (2)-es függvény maximumának elsőrendű feltétele (ERF):

$$\frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} = 0 \quad (3)$$

7.9

A hasznosságmaximalizálási probléma megoldása behelyettesítéssel módszerrel (folytatás)

A költségvetési egyenesből meghatározható:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2} \quad (4)$$

(4)-et (3)-ba behelyettesítve és átrendezve megkapjuk az érintőfeltételt:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} / \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (5)$$

Avagy:

$$|\text{MRS}| = \frac{p_1}{p_2} \quad (5')$$

7.10

A hasznosságmaximalizálási probléma megoldása Lagrange-módszerrel

A hasznosságmaximalizálási probléma:

$$\left. \begin{array}{l} \max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) \\ \text{kf : } p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Definiáljuk a Lagrange-függvényt!

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) \quad (2)$$

Keressük meg a Lagrange-függvény maximumát! Elsőrendű feltételek:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0 \quad (5)$$

7.10

A hasznosságmaximalizálási probléma megoldása Lagrange-módszerrel (folytatás)

Rendezzük át a (3)-as és (4)-es egyenletet, és osszuk el őket egymással!

Ekkor megkapjuk az érintőfeltételt:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} / \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (6)$$

Avagy:

$$|\text{MRS}| = \frac{p_1}{p_2} \quad (6')$$

A λ (Lagrange-szorzó) szerinti elsőrendű feltételt átrendezve, visszakapjuk a költségvetési egyenes egyenletét:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (7)$$

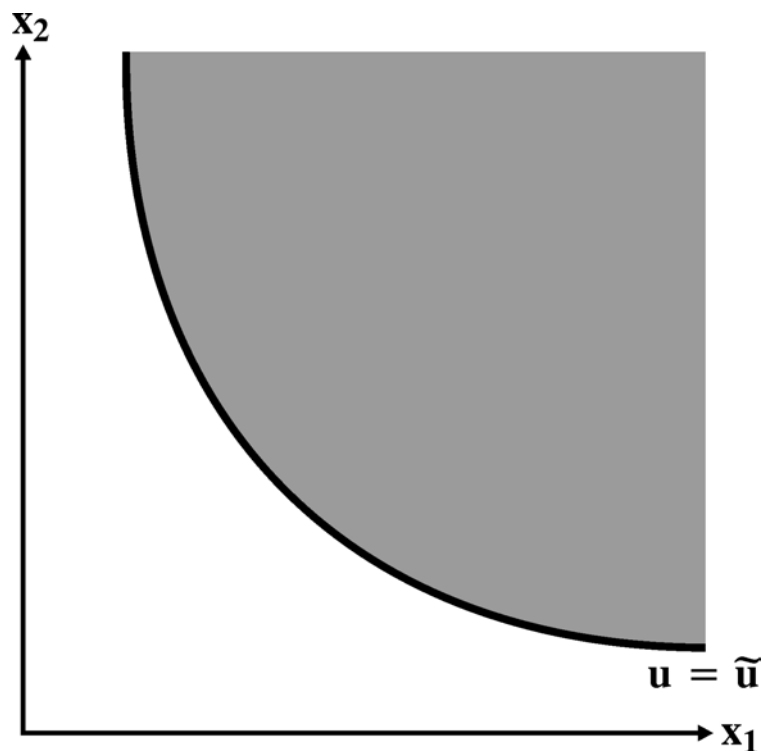
A (6)-os és (7)-es egyenletek segítségével meghatározhatjuk x_1 és x_2 optimális értékét.

Az optimális értékek nyilván függenek a (6)-os és (7)-es egyenletek paramétereitől (az áraktól és a fogyasztó jövedelmétől):

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= x_1^*(p_1, p_2, m) \\ x_2^* &= x_2^*(p_1, p_2, m) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

7.11

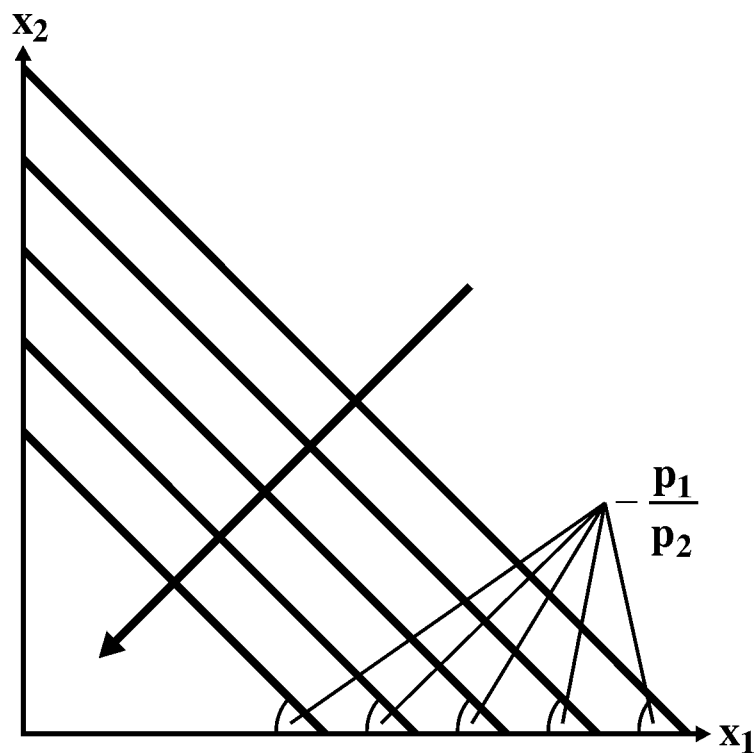
Egy minimálisan elfogadható hasznossági szint kijelölése



A fogyasztó $u \geq \tilde{u}$ hasznossági szintnél kevesebbel nem kívánja beérni.

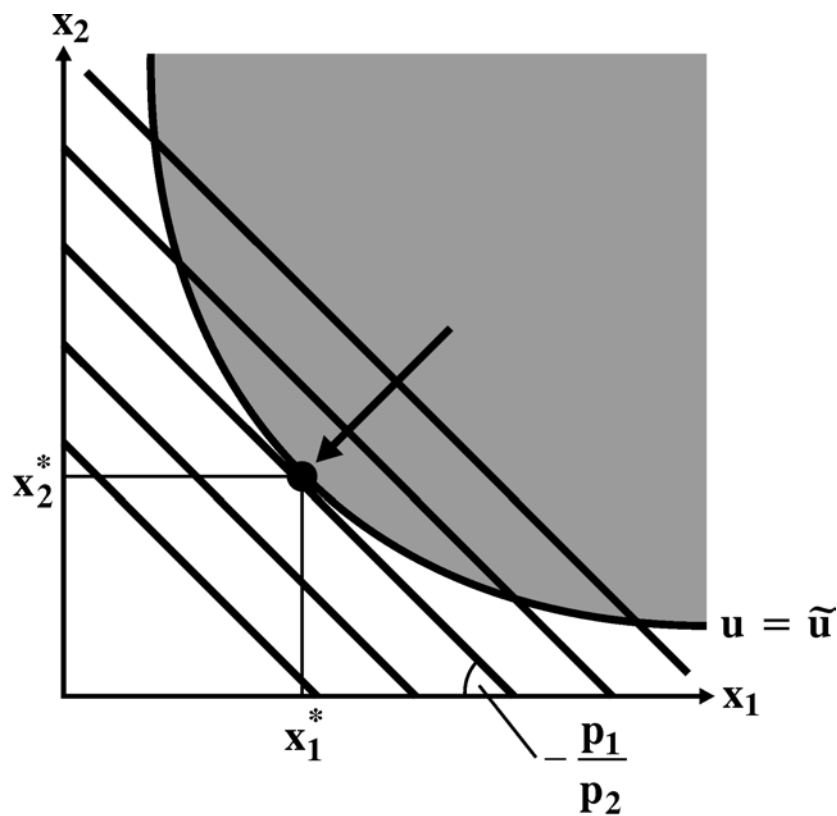
7.12

A fogyasztói kiadások minimalizálása (adott árak mellett)



7.13

**A kiadásminimalizálási probléma:
a fogyasztó keresi azt a minimális kiadási
szintet, amely elegendő ahhoz, hogy előre
rögzített hasznossági szintjét elérje**



$$\text{MRS} = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2} = -\frac{p_1}{p_2} \quad (\text{érintőfeltétel})$$

7.14

A kiadásminimalizálási probléma

Keressük azt az (x_1^*, x_2^*) optimális jószágkosarat, amelynél az x_1 és x_2 jószágra történő kiadásaink összege:

$$(p_1 x_1 + p_2 x_2)$$

minimális, de elegendő ahhoz, hogy egy előre rögzített:

$$\tilde{u} \leq u(x_1, x_2)$$

hasznossági szintet elérjünk ($x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$).

Rövidített jelölésmóddal:

$$\begin{array}{l} \min_{x_1, x_2} (p_1 x_1 + p_2 x_2) \\ \text{kf} : \tilde{u} \leq u(x_1, x_2) \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{array}$$

$(p_1 x_1 + p_2 x_2)$: célfüggvény

kf: korlátozó feltétel

7.15

A kiadásminimalizálási probléma algebrai megoldása

A kiadásminimalizálási probléma:

$$\left. \begin{aligned} \min_{x_1, x_2} (p_1 x_1 + p_2 x_2) \\ \text{kf : } \tilde{u} = u(x_1, x_2) \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Definiáljuk a Lagrange-függvényt!

$$L(x_1, x_2, \mu) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \mu(u(x_1, x_2) - \tilde{u}) \quad (2)$$

Keressük meg a Lagrange-függvény minimumát! Elsőrendű feltételek:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \mu \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 & \quad (3) \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \mu \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 & \quad (4) \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = u(x_1, x_2) - \tilde{u} = 0 & \quad (5) \end{aligned} \right.$$

7.15

A kiadásminimalizálási probléma algebrai megoldása (folytatás)

Rendezzük át a (3)-as és (4)-es egyenletet, és osszuk el őket egymással!

Ekkor megkapjuk az érintőfeltételt:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} / \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (6)$$

Avagy:

$$|\text{MRS}| = \frac{p_1}{p_2} \quad (6')$$

A μ (Lagrange-szorzó) szerinti elsőrendű feltételt átrendezve, visszakapjuk a korlátozó feltétel egyenletét:

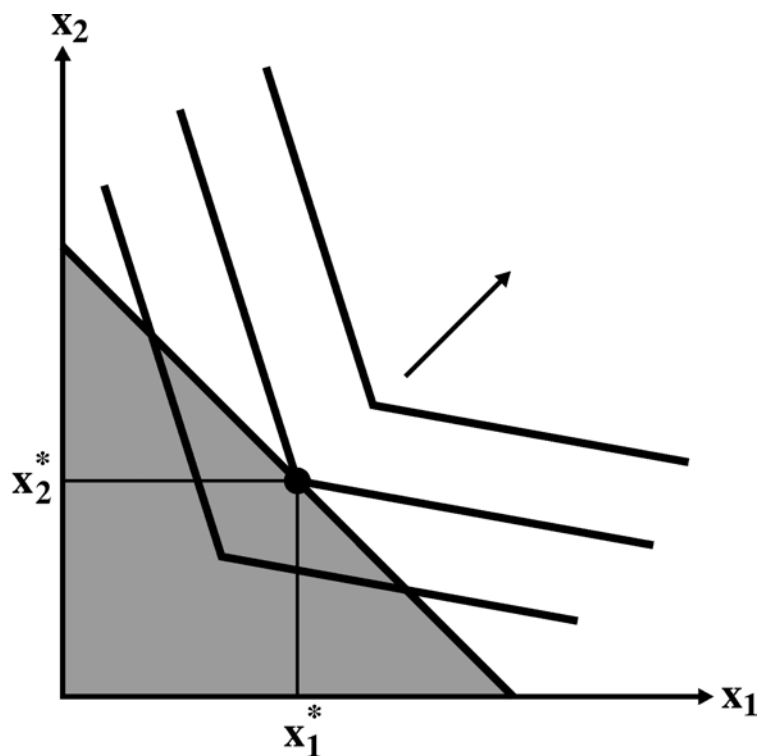
$$u(x_1, x_2) = \tilde{u} \quad (7)$$

A (6)-os és (7)-es egyenletek segítségével meghatározhatjuk x_1 és x_2 optimális értékét. Az optimális értékek nyilván függenek a (6)-os és (7)-es egyenletek paramétereitől (az áraktól és a fogyasztó előre rögzített hasznossági szintjétől):

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= x_1^*(p_1, p_2, \tilde{u}) \\ x_2^* &= x_2^*(p_1, p_2, \tilde{u}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

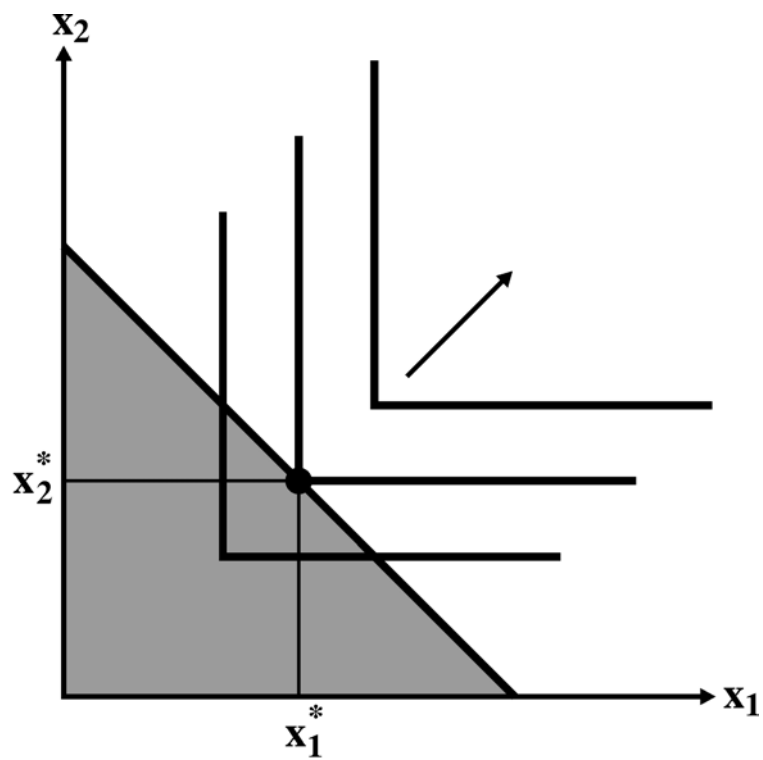
7.16

Töréspontot tartalmazó preferenciák



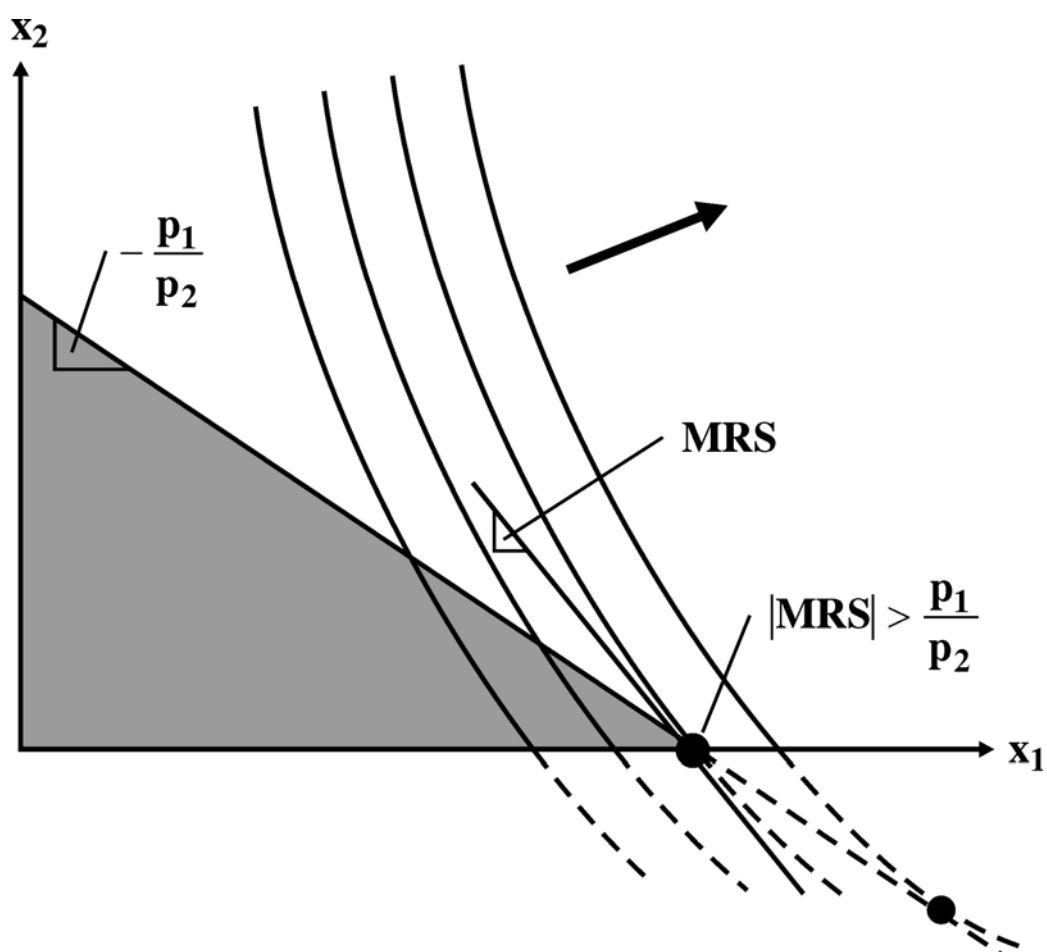
7.17

Tökéletes kiegészítés



7.18

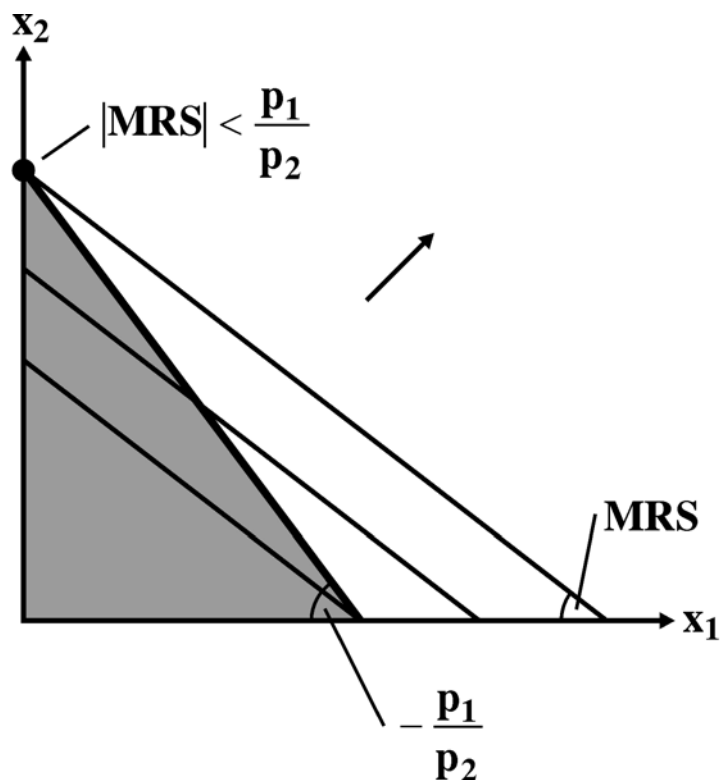
Szélső optimum (vagy: sarokmegoldás)



Mivel $x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$,
az optimumban:

$$|MRS| \neq \frac{p_1}{p_2}.$$

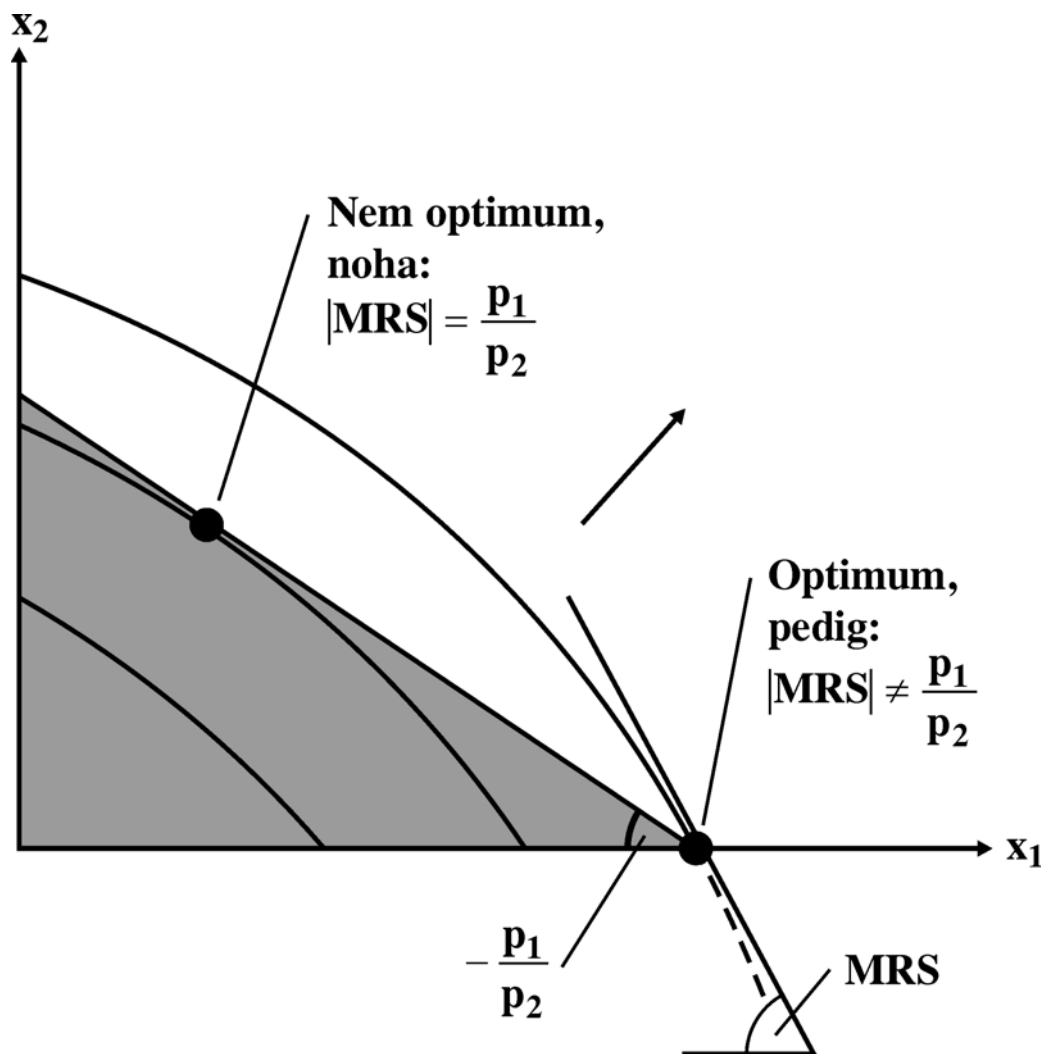
7.19 Tökéletes helyettesítés



Általános esetben (ha a költségvetési egyenes és a közömbösségi görbe nem esik egybe):

$$|MRS| \neq \frac{P_1}{P_2}.$$

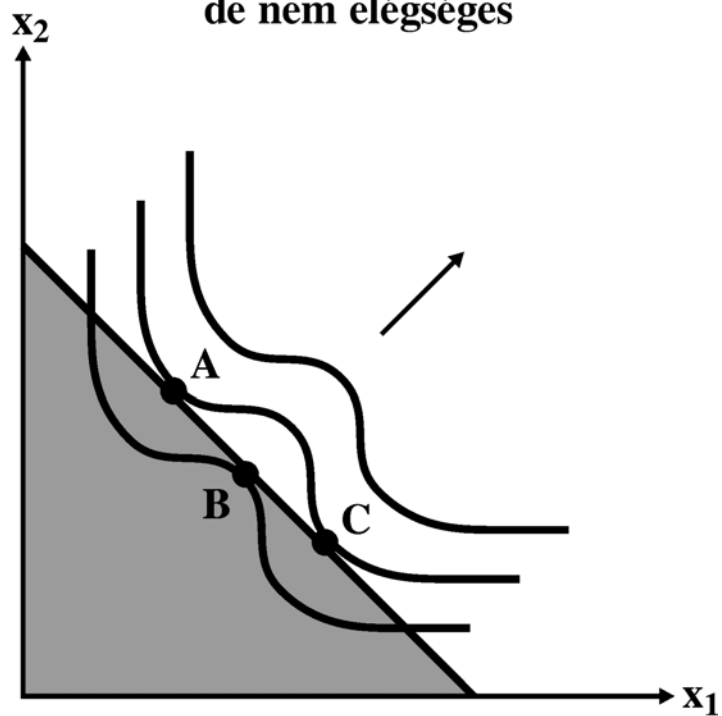
7.20 Konkáv preferenciák (specializáció)



7.21

Egynél több érintési pont

Az érintőfeltétel szükséges,
de nem elégséges



B: nem optimum
A, C: optimum