MIKRO-
ÖKONÓMIA
ELŐADÁSVÁZLATOK

2. előadás

HEURISZTIKUS BEVEZETÉS A KÉTVÁLTOZÓS ANALÍZISBE

Simonovits András

Bevezetés

A mikroökonómia szabatos tanulmányozásához a többváltozós függvények analízisére (differenciál- és integrálszámítására) van szükség, amely hosszabb előkészítést igényel (Sydsater–Hammond, rövidítve: SH, 15–18. fejezet). Lehetséges azonban a kétváltozós analízist heurisztikus úton is vázolni, amely első közelítésként elfogadható a mikroökonómia tanulásánál. A mostani előadásban tehát a hallgatót/olvasót a kétváltozós analízisbe heurisztikusan vezetem be. Nem törekszem szabatosságra, de igyekszem kidomborítani a lényeget. A fontosabb fogalmakat és tételeket példákkal és feladatokkal szemléltetem.

1. Egyváltozós függvényekről

Bemelegítésként definiáljuk az egyváltozós, skalár–skalár függvényt.

Definíció. Legyen D az $\mathbf{R}$ valós egyenes egy intervalluma. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezést a D-n értelmezett *skalár–skalár függvény*nek nevezzük, ha f a D intervallum bármely x pontjához egy y valós számot rendel.

1.1. példa. A parabolafüggvény: $y = -x^2$.

Egy sima (folytonosan differenciálható) függvény lokális viselkedését differenciálhányadosával, más néven deriváltjával elemezzük. Pontosabban:

Definíció. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ leképezés az x_0 pontban *deriválható*, ha létezik az

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték. A határértéket a függvény x_0 pontban vett *deriváltjá*nak nevezzük.

Megjegyzés. Az x_0 pontban deriváltható függvény x_0 pontbeli érintőjének egyenlete

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

1.2. példa. A parabolafüggvény deriváltja $y' = -2x$.

A derivált segítségével jellemezhető a függvény konkavitása/konvexitása. Most a rövidség kedvéért csupán a függvény maximumával foglalkozunk. (Számos matematikai és közgazdasági feladatban keressük a függvény legnagyobb értékét, a maximumot.)

Definíció. Az $y = f(x)$ skalár-skalárfüggvénynek a D halmazon *maximuma* van az x_0 pontban, ha e pontban a függvény értéke legalább akkora, mint a halmaz bármely más pontjában:

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad x \in D.$$

Könnyen belátható az

1.1. tétel. *Ha az $y = f(x)$ skalár-skalárfüggvény deriválható a D nyílt halmazon és maximuma van az x_0 pontban, akkor a maximumban a derivált nulla:*

$$f'(x_0) = 0.$$

1.3. példa. A parabolafüggvény a $(-\infty,\infty)$ intervallumbeli maximumát az $x_0 = 0$-ban veszi föl. Valóban: $y' = -2x = 0$.

Az elsőrendű feltétel mellett a másodrendű derivált negativitása adja a függvény maximuma létezésének elégséges feltételét.

Bemelegítésünk után rátérünk a tulajdonképpeni tárgyunkra, a kétváltozós függvények elemzésére.

2. Kétváltozós skalárfüggvények alapfogalmai

Először definiáljuk a kétváltozós–skalár(értékű) függvényt (SH, 467–472. o.).

Definíció. Legyen D egy síkbeli halmaz. Az $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ leképezést a D-n értelmezett *kétváltozós–skalár függvény*nek nevezzük, ha f a D halmaz bármely (x,y) pontjához egy z valós számot rendel.

SH-ból másoljuk a kétváltozós–skalár függvényt mutató ábrát (és a többbit is).

(2.1. ábra)

2.1. példa. Az összeg- és a szorzatfüggvény: $z = x + y$ és $z = xy$.

Definíció. A $z = f(x,y)$ függvény c állandójú *szintvonalá*nak nevezzük azt az $\{(x,y)\}$ síkbeli halmazt, amelynek pontjaira teljesül $f(x,y) = c$.

Megjegyzés. Ha egy domborzati térképet nézünk, ott az adott magasságú pontok össze vannak kötve egymással – ezek a szintvonalak.

2.2. példa. Az összegfüggvény c állandójú szintvonalának egyenlete $y = c - x_0$.

2.1. feladat. Igazoljuk, hogy a szorzatfüggvény c állandójú szintvonalának egyenlete $y = c/x$!

A kétváltozós függvények szintvonala egy egyváltozós implicit függvény.

2.3. példa. A (0,0)-központú, r-sugarú kör implicit egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$. Explicit alakban két egyváltozós függvény adódik: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ és $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, ahol $-r \leq x \leq r$.

Definíció. A $z = f(x,y)$ függvénynek a D halmazon *maximuma* van az (x_0,y_0) pontban, ha e pontban a függvény értéke legalább akkora, mint a halmaz bármely más pontjában:

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y), \qquad (x,y) \in D.$$

A maximumot a következő ábra mutatja.

(2.2. ábra)

Megjegyzések. 1. A matematikában gyakran mutatkozik némi feszültség a pontosság és az érthetőség között. Az érthetőség érdekében célszerűbb lenne a *szigorú* maximumot definiálni, szigorú egyenlőtlenséggel, de ekkor az állandó függvénynek nem lenne (ti. szigorú) maximuma, pedig eleget tesz a Weierstrass-tétel feltételeinek.

2. *Lokális maximum*ról beszélünk, ha a D tartomány tartalmaz az (x_0,y_0) pont körül egy K kört, és az egyenlőtlenség e kör bármely pontjára fennáll:

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y), \qquad (x,y) \in K.$$

3. Egy f függvény *minimuma* az ellentett $-f$ függvény maximuma.

E pont zárásaként tekintsük a következő közgazdasági optimalizálási feladatot.

2.4. példa. Egy vállalat K mennyiségű géppel és L órányi munkával $6K^{1/2}L^{1/3}$ mennyiségű terméket képes előállítani. Tegyük föl, hogy egy egység gép bérleti díja r, egy óra munka bére w és egy termék ára p. Mennyi gépet és munkát alkalmazzon a vállalat, ha nyereségét akarja maximalizálni? A maximalizálandó nyereség a bevétel és a kiadás különbsége, az előbbi az ár és a termelés szorzata, az utóbbi a gép és a munka bérleti díja:

$$\pi(K,L) = 6pK^{1/2}L^{1/3} - rK - wL.$$

A válasszal várnunk kell a következő pontig.

3. Kétváltozós függvény deriváltjai

Eddig csak az egyváltozós analízisből ismert fogalmakat terjesztettük ki mechanikusan a kétváltozós esetre. Most olyan fogalmakat vezetünk be, ahol a kiterjesztés nem mechanikus, és alapvető szerepet játsszanak a mikroökonómiában is (SH, 474–482. o.).

Definíció. A síkbeli D tartományon értelmezett $z = f(x,y)$ függvénynek az $(x_0,y_0) \in D$ pontbeli x, illetve y szerinti *elsőrendű parciális derivált*jának nevezzük az $y = y_0$, illetve $x = x_0$ rögzítése mellett adódó egyváltozós $f(x,y_0)$, ill. $f(x_0,y)$ függvény deriváltját (feltéve, hogy létezik):

$$f'_x(x_0,y_0) = \frac{d}{dx} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0} \qquad \text{és} \qquad f'_y(x_0,y_0) = \frac{d}{dy} f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}.$$

Szabatosabb, de bonyolultabb a következő jelölés:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

A következő ábra szemlélteti a parciális deriváltakat.

(2.3. ábra)

3.1. példa. Az összegfüggvény elsőrendű parciális deriváltjai rendre $f'_x = f'_y = 1$.

3.1. feladat. Igazoljuk, hogy a szorzatfüggvény elsőrendű parciális deriváltjai rendre $f'_x = y$ és $f'_y = x$!

Ahogyan az egyváltozós analízisben az érintőegyenes, úgy a kétváltozós analízisben az érintősík a függvény elsőrendű közelítése. Induljunk ki abból, hogy az (x_0,y_0,z_0) ponton átmenő síkok egyenlete

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0) \qquad \text{alakú,}$$

ahol a és b alkalmas valós számok, s legalább egyikük különbözik a nullától. Ha a függvény sima az (x_0,y_0) pontban, akkor létezik érintősikja. Erről szól a következő

Definíció. Az f függvény az (x_0,y_0) *pontban differenciálható*, ha létezik olyan a és b skalár, amelyre a

$$e(x,y) = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0) \tag{3.1}$$

sík a függvényt az (x_0,y_0) pontban *jól közelíti*. Ez a sík a függvény adott pontbeli *érintősík*ja.

3.1. tétel. *Tegyük föl, hogy az f függvénynek az $(x_0,y_0) \in D$ pont alkalmas környezetében mindkét elsőrendű parciális deriváltja létezik és folytonos függvény. Ekkor az f függvény az (x_0,y_0) pontban differenciálható és az érintősík együtthatói a parciális deriváltak:*

$$e(x,y) = z_0 + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0). \tag{3.1'}$$

A következő ábrán látható egy függvény adott pontbani érintősíkja.

(2.4. ábra)

Megjegyzés. A véges különbségek (differenciák) helyett szokás végtelen kicsiny *differenciálokkal* is dolgozni:

$$dz = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy.$$

3.2. példa. a) Az összegfüggvény bármely pontbeli érintősíkjának az egyenlete maga a függvény: $z = x + y$. b) A szorzatfüggvény érintősíkjának az egyenlete az $(1,1)$ pontban $z - 1 = x - 1 + y - 1$. A második összefüggést jól használhatjuk az egységnégyzet területének változásának közelítésére: ha az egyik oldalt $x = 1 + h$-ra, a másikat $y = 1 + k$-ra változtatjuk, akkor

$$xy = (1 + h)(1 + k) = 1 + h + k + hk \approx 1 + h + k.$$

Például $1{,}1^2 = 1{,}21 \approx 1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 1{,}2$.

Kimondjuk a következő tételt (SH, 560. o.).

3.2. tétel. *(Elsőrendű feltétel.) Ha a síkbeli D tartományon értelmezett és differenciálható f kétváltozós–skalár függvénynek lokális maximuma van az (x_0,y_0) pontban, akkor e pontban mindkét parciális derivált nulla:*

$$f'_x(x_0,y_0) = 0 \qquad \text{és} \qquad f'_y(x_0,y_0) = 0.$$

Megjegyzések. 1. Gondoljunk egy vízszintes asztalra lapjával helyezett tökéletes félgömbre. A legmagasabb pontjában mind az ÉD-i, mind a KNY-i főkör érintője vízszintes, az érintősík szintén.

2. Két egyenletünk van két ismeretlen meghatározására, ez általában működik.

Bizonyítás. Ahogyan az egyváltozós esetben az érintőegyenesnek, most az érintősíknak kell vízszintesnek lennie a lokális maximumban. ∎

Általánosítsuk a szorzatfüggvényt a következőképpen és vizsgáljuk meg a szélsőérték elsőrendű feltételét!

3.3. példa. Az $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, (ahol a, b és c skalárok) kvadratikus alak esetén $f'_x = 2ax + 2by = 0$, $f'_y = 2bx + 2cy = 0$, azaz tipikus esetben $x_0 = y_0 = 0$.

A húr helyzetén kívül az érintősík segítségével is definiálható a konkavitás fogalma:

Definíció. Egy síkbeli D tartományon értelmezett és differenciálható f kétváltozós–skalár függvényt az (x_0,y_0) *pontban konkáv*nak nevezünk, ha a pont alkalmas K környezetében az érintősík a függvény fölött helyezkedik el vagy egybeesik vele:

$$f(x,y) \le z_0 + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0), \qquad (x,y) \in K. \tag{3.2}$$

(2.5. ábra)

Megjegyzések. 1. *Szigorúan konkáv függvény*ről beszélünk, ha a sík szigorúan a függvény fölött helyezkedik el; ekkor (3.2)-ben szigorú egyenlőtlenség áll.

2. Egy függvényt *konvex*nek nevezünk, ha ellentettje konkáv.

Az egyváltozós esethez hasonlóan igaz a 3.2. tétel megfordítása.

3.3. tétel. *Egy differenciálható konkáv függvény stacionárius pontja lokális maximum, azaz az elsőrendű szükséges feltétel elegendő is.*

Bizonyítás. (3.2) alapján. ∎

Most már megoldhatjuk a 2.4. példabeli nyereségmaximalizálási feladatot.

3.4. példa. Ha a nyereségfüggvénynek van lokális maximuma, akkor ott mindkét parciális deriváltja nulla:

$$\pi'_K(K,L) = 3pK^{-1/2}L^{1/3} - r = 0,$$

$$\pi'_L(K,L) = 2pK^{1/2}L^{-2/3} - w = 0.$$

Rendezve és összeszorozva a két egyenletet:

$$6p^2L^{-1/3} = rw, \qquad \text{azaz} \qquad L_0 = \frac{216p^6}{r^3w^3}.$$

Négyzetre emelve az első egyenletet és összeszorozva a másodikkal:

$$18p^3K^{-1/2} = r^2w, \qquad \text{azaz} \qquad K_0 = \frac{324p^6}{r^4w^2}.$$

Belátható, hogy a nyereségfüggvény konkáv, tehát (K_0,L_0) lokális maximum.

3.2. feladat. Igazoljuk, hogy a) az $x^2 + y^2$ függvénynek a $(0,0)$ pont lokális és globális minimuma; b) az $x^2 - y^2$ függvénynek a $(0,0)$ stacionárius pont se nem lokális, se nem globális szélsőértéke!

Nagyon fontos az egyváltozós láncszabály következő kiterjesztése (SH, 505–508. o.):

3.4. tétel. *(Totális derivált.) Legyen $z = f(x,y)$ egy kétváltozós, $x = X(t)$ és $y = Y(t)$ egy-egy egyváltozós differenciálható skalár függvény, s az utóbbiak R_X, R_Y értékkészletének Descartes-szorzata essék bele az előző függvény értelmezési tartományába: $R_X \times R_Y \subseteq D$. Ekkor a $z = f(X(t),Y(t))$ összetett skalár–skalárfüggvény is differenciálható és a t szerinti, ún. totális derivált értéke a következő:*

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(X(t),Y(t))\frac{dx}{dt} + f'_y(X(t),Y(t))\frac{dy}{dt}.$$

Bizonyításvázlat. Az egyváltozós láncszabály heurisztikus levezetése a véges differenciák határértéke helyett rögtön a differenciálokkal dolgozik, mintha a differenciálhányados tört lenne:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Most az érintősík egyenletére alkalmazzuk a helyettesítést/bővítést:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

∎

Homogén függvények

A közgazdasági alkalmazásokban az arányos változásoknál nagyon fontos szerepet játszanak a homogén függvények (S–H, 530–535. o.).

Definíció. Legyen k egy valós szám. Egy f kétváltozós–skalár függvényt *k-adfokban pozitív homogén függvény*nek nevezünk, ha az értelmezési tartomány minden pontjára teljesül, hogy

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y) \qquad \text{minden} \qquad t-\text{re}. \tag{3.3}$$

3.4. példa. Az x/y hányadosfüggvény 0-adfokban, az $x+y$ összegfüggvény elsőfokban, és az xy szorzatfüggvény másodfokban pozitív homogén függvény.

3.3. feladat. Legyen $0 < \alpha,\beta < 1$ és $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$. Igazoljuk, hogy ez a függvény $\alpha+\beta$ fokban pozitív homogén!

A közgazdaságtanban alapvető jelentőségű a következő tétel:

3.5. tétel. *(Euler-tétel.) Ha az f függvény k-adfokban pozitív homogén, akkor*

$$xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = kf(x,y). \tag{3.4}$$

Bizonyítás. (3.3) mindkét oldalát t szerint deriváljuk, a bal oldalon a totális derivált alapján:

$$xf'_x(tx,ty) + yf'_y(tx,ty) = kt^{k-1}f(x,y).$$

$t = 1$ helyettesítéssel adódik (3.4). ∎

A másodrendű deriváltak segítségével elemezhető a függvény konkavitása/konvexitása és megadható a maximum, illetve minimum elégséges feltétele is. E kérdések tárgyalása azonban meghaladja e rövid jegyzet kereteit.

4. Feltételes szélsőérték

A közgazdaságtan adott feltételek melletti optimalizálással foglalkozik, ezt hívják a matematikában *feltételes szélsőérték-számítás*nak. Legyen f, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ egy-egy sima (folytonosan differenciálható) függvény.

Az $f(x,y)$ függvény lokális (feltételes) maximumát keressük a $g(x,y) = c$ feltétel mellett (SH, 614–622. o.).

A következő ábrapár egy olyan hegymászási feladatot mutat, ahol egy adott hegyi úton haladva kell a lehető legmagasabbra eljutni: B pont. Ha a síkba vetítjük a hegy felszínét és a hegyi utat, akkor a második ábrát kapjuk.

(2.6–2.7. ábra)

A feladat egyszerűen megoldható, ha könnyen ki lehet fejezni g-ből y-t mint x függvényét (lásd a következő példát.)

4.1. példa. Adott kerületű téglalapok között melyik területe a legnagyobb? Maximalizáljuk az $f(x,y) = xy$ függvényt az $x + y = c$ feltétel mellett, ahol c a félkerület! $y = c - x$-et behelyettesítve f-be: $F(x) = x(c - x) = cx - x^2$. Deriválva az egyváltozós konkáv függvényt, az $F'(x) = c - 2x = 0$ elsőrendű feltételből adódik az optimum: $x_0 = c/2$, azaz a korlátból $y_0 = c/2$: a négyzet.

(2.8. ábra)

Ha viszont nem lehet könnyen kifejezni g-ből y-t mint x függvényét vagy a kiküszöbölés elrontaná a feladat szimmetriáját (a hamarosan bemutatandó 4.3. feladat mindkettőre példa), akkor érdemes egy más, közvetett módszerrel próbálkozni.

A módszer alapgondolata az, hogy a célfüggvénybe beépítjük a korlátot – a kapott kétváltozós függvényt *Lagrange-függvény*nek nevezzük:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda[g(x,y) - c], \tag{4.1}$$

– s ezzel a feltételes stacionárius pont keresését feltétel nélkülivé változtatjuk. Ha ugyanis teljesül a $g(x,y) = c$ feltétel, akkor tetszőleges λ szorzó esetén $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y)$.

4.1. tétel. *(Lagrange-módszer.) Ha az f függvénynek a $g(x,y) = c$ feltétel mellett az (x_0,y_0) pontban lokális (feltételes) maximuma van, és $g_y(x_0,y_0) \neq 0$, akkor alkalmas λ_0 valós szám esetén az $\mathcal{L}(x,y)$ Lagrange-függvényre teljesül az elsőrendű feltétel:*

$$\mathcal{L}'_x = 0 \qquad \text{és} \qquad \mathcal{L}'_y = 0, \tag{4.2}$$

azaz

$$f'_x = \lambda_0 g'_x \qquad \text{és} \qquad f'_y = \lambda_0 g'_y. \tag{4.2'}$$

Megjegyzések. 1. A 4.2. példában látni fogjuk, hogy f feltételes maximumhelye $\mathcal{L}$-nek csak stacionárius pontja, de nem maximuma! Másképp kifejezve: a feltételes maximumfeladat megoldásait a Lagrange-függvény stacionárius pontjai között kell keresnünk.

2. Három egyenletünk: (4.2a) és (4.2b), illetve a korlát; és három ismeretlenünk: x, y, λ van, ekkor tipikusan van megoldás, esetleg nem is egy, de nem is sok.

3. Az, hogy a (4.2) elsőrendű feltétel megoldása maximumot vagy minimumot vagy egyiket sem ad, további vizsgálatot igényel, amely az egyváltozós szélsőérték-számítás másodrendű feltételeihez hasonlító szabályokon alapul.

A **bizonyítás** eléggé bonyolult, s a közvetlen módszert kell végigszámolni.

Most szemléltetésként az 4.1. példában szereplő feltételes maximalizálási feladatot az új módszer segítségével is megoldjuk, bár itt nincs igazán szükség rá.

4.2. példa. A Lagrange-módszer segítségével maximalizáljuk a xy függvényt az $x+y=c$ feltétel mellett. $\mathcal{L}(x,y) = xy - \lambda(x+y-c)$. $\mathcal{L}$-t parciálisan deriválva, $\mathcal{L}'_x(x,y) = y - \lambda = 0$ és $\mathcal{L}'_y(x,y) = x - \lambda = 0$. Kiküszöbölve λ-t, adódik $x = y$. Visszahelyettesítve a korlátba: $x_0 = y_0 = c/2 = \lambda$.

Figyeljük meg, hogy $\mathcal{L}(x,y) = xy - \lambda(x+y-c)$ még az optimális $\lambda = c/2$ szorzónál sem maximális $x_0 = y_0 = c/2$-ben, hiszen $\mathcal{L}$ korlátlan!

A közgazdasági feladatokban különösen érdekes kérdés: hogyan változik a célfüggvény értéke a korlát változásakor? Erre válaszol a

4.2. tétel. *Tegyük föl, hogy a feltételes maximumfeladatnak optimuma van egy megfelelő I paraméterintervallum minden pontjában. Legyen a feladat parametrikus maximumhelye $(x^*(c),y^*(c))$ a paraméter sima függvénye, és a maximumérték-függvény legyen*

$$f^*(c) = f(x^*(c),y^*(c)). \tag{4.3}$$

Ekkor a maximumérték lokális változása a c korlát parányi dc változásánál $\lambda^*(c)dc$. Képletben:

$$\lambda^*(c) = f^{*\prime}(c). \tag{4.4}$$

Bizonyítás. Vegyük (4.3) c szerinti totális deriváltját:

$$\frac{df^*(x^*(c),y^*(c))}{dc} = f_x^{*\prime} x^{*\prime}(c) + f_y^{*\prime} y^{*\prime}(c).$$

(4.2′)-t figyelembe véve:

$$\frac{df^*(x^*(c),y^*(c))}{dc} = \lambda^*(c)[g_x^{*\prime} x^{*\prime}(c) + g_y^{*\prime} y^{*\prime}(c)]. \tag{4.5}$$

A $g(x^*(c),y^*(c)) \equiv c$ azonosságnak vegyük a totális deriváltját:

$$g_x^{*\prime} x^{*\prime}(c) + g_y^{*\prime} y^{*\prime}(c) = 1. \tag{4.6}$$

(4.6)-ot behelyettesítve (4.5)-be, adódik (4.4). ∎

4.2. feladat. Igazoljuk, hogy ha a téglalapok félkerülete c, akkor a félkerület parányi dc növelésekor az optimális téglalap, azaz a négyzet területe $(c/2)dc$-vel nő! Ez a 4.1–2. példa célfüggvényértékének függése a korláttól!

(2.9. ábra)

4.3. feladat. A Lagrange-módszer segítségével maximalizáljuk az $x+y$ függvényt az $x^2+y^2=1$ feltétel mellett!

Megoldások

2.1. feladat. Triviális.

3.1. feladat. Triviális.

3.2. feladat. A 3.2. példából látható, hogy mindkét függvény stacionárius pontja (0,0). Az a) esetben nyilvánvaló a maximum, hiszen $(x,y) \neq (0,0)$ esetén $x^2 + y^2 > 0$. A b) esetben az $y = 0$ egyenesen a függvény felülről nem korlátos, az $x = 0$ egyenesen a függvény alulról nem korlátos. Ugyanakkor (0,0) a függvény nyeregpontja.

3.3. feladat. Behelyettesítéssel.

4.1. feladat. Egyrészt: $f^*(c) = c^2/4$, $f^{*\prime}(c) = c/2$, másrészt: $F(x,c) = x(c - x)$, $F_c'(x,c) = x$, azaz $F_c'(x(c),c) = c/2$.

4.2. feladat. $f^*(c) = \max\{xy, \text{ ahol } x + y = c\} = c^2/4$, $f^{*\prime}(c) = c/2 = \lambda$.

4.3. feladat. $\mathcal{L}(x,y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. $\mathcal{L}$-t parciálisan deriválva, $\mathcal{L}_x'(x,y) = 1 - 2\lambda x = 0$ és $\mathcal{L}_y'(x,y) = 1 - 2\lambda y = 0$. Kiküszöbölve λ-t, adódik $x = y$. Visszahelyettesítve a feltételbe: $x_0 = y_0 = 1/\sqrt{2}$.

MIKRO-
ÖKONÓMIA
ELŐADÁSVÁZLATOK

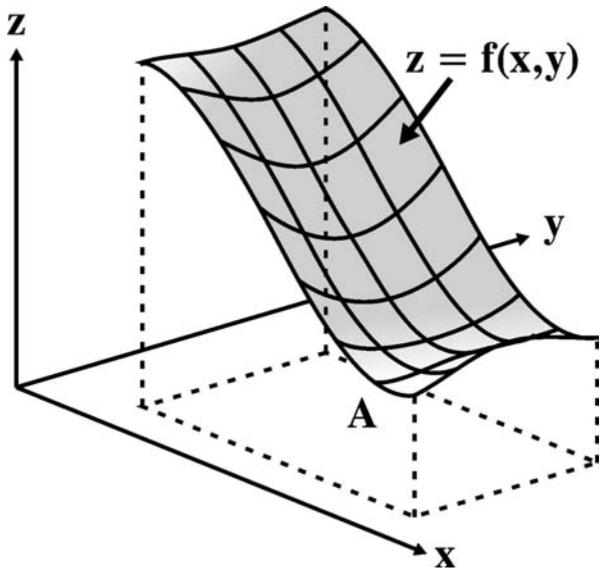
2. előadás

HEURISZTIKUS BEVEZETÉS A KÉTVÁLTOZÓS ANALÍZISBE

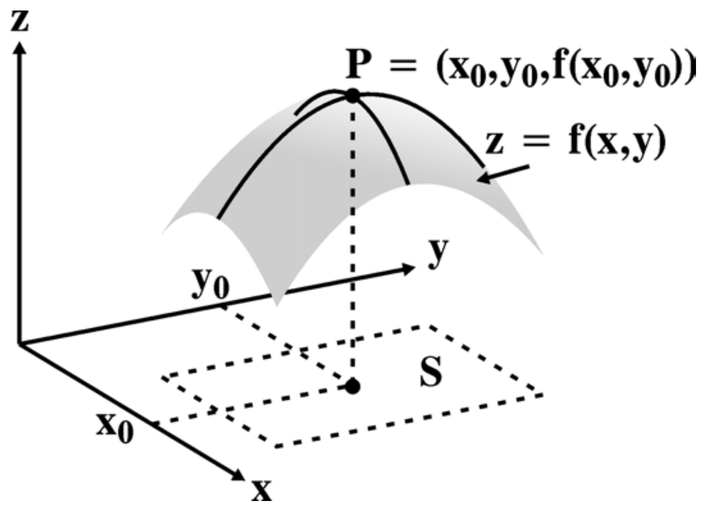
MELLÉKLET

Simonovits András

2.1
Kétváltozós függvény grafikonja



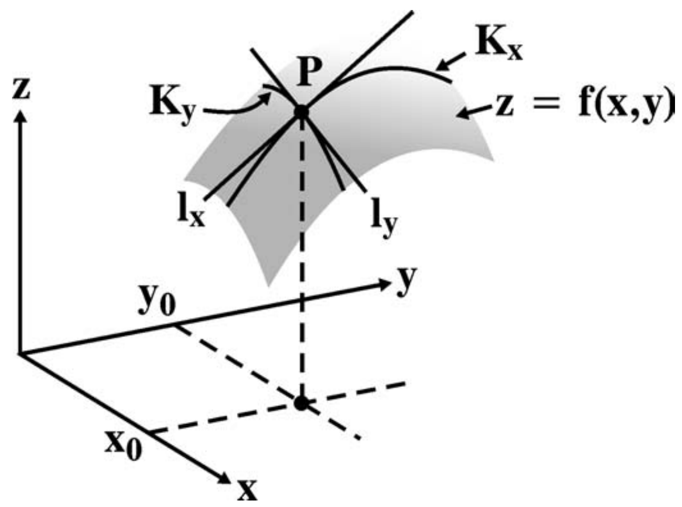
2.2
Kétváltozós függvény maximuma



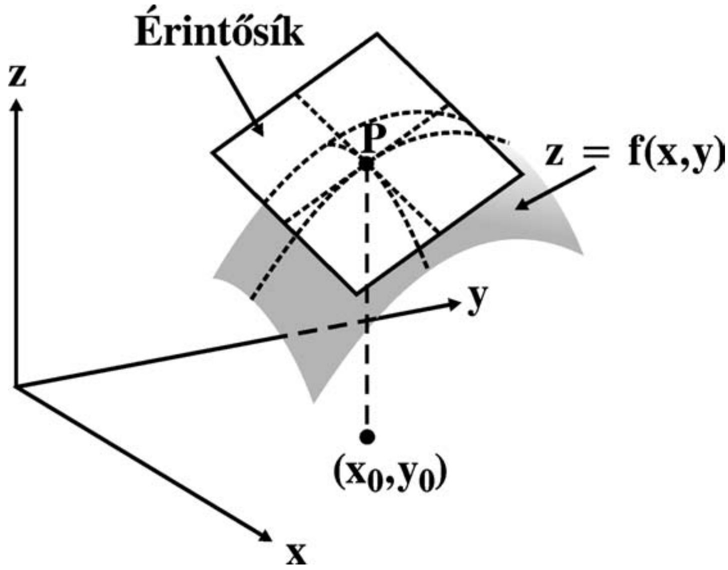
Az f(x,y) függvénynek maximuma van az (x_0,y_0) pontban, hiszen P a felület legmagasabb pontja.

$$f_1'(x_0,y_0) = f_2'(x_0,y_0) = 0$$

2.3
Kétváltozós függvény parciális deriváltjai

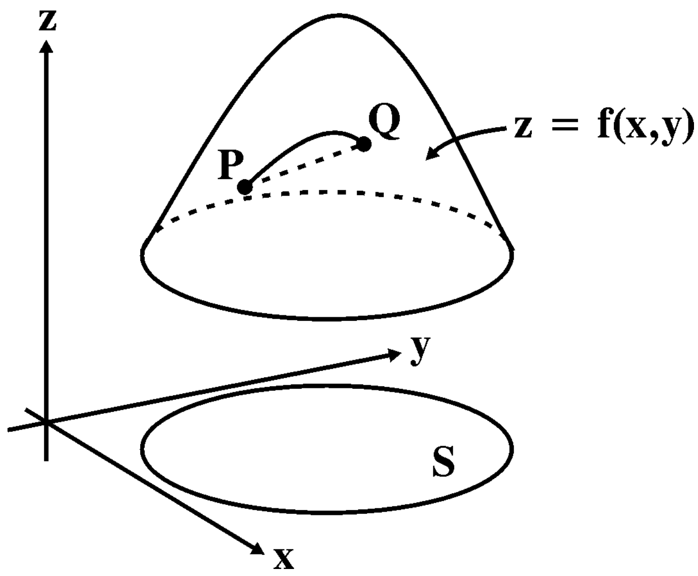


2.4
Érintősík



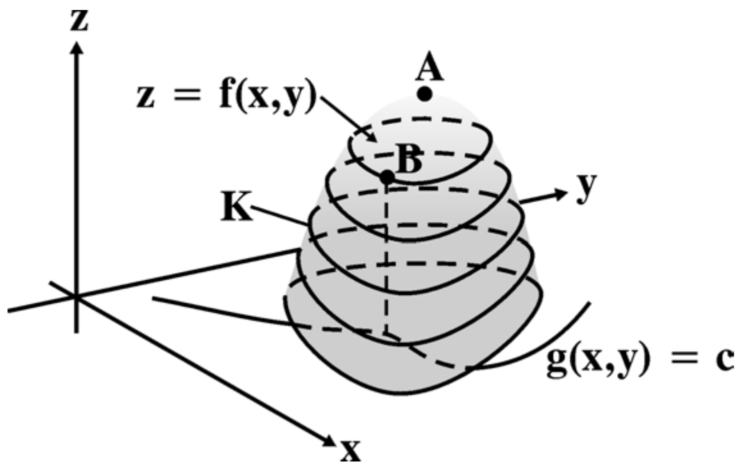
A z = f(x,y) függvény grafikonja és P pontbeli érintősíkja

2.5
Kétváltozós konkáv függvény

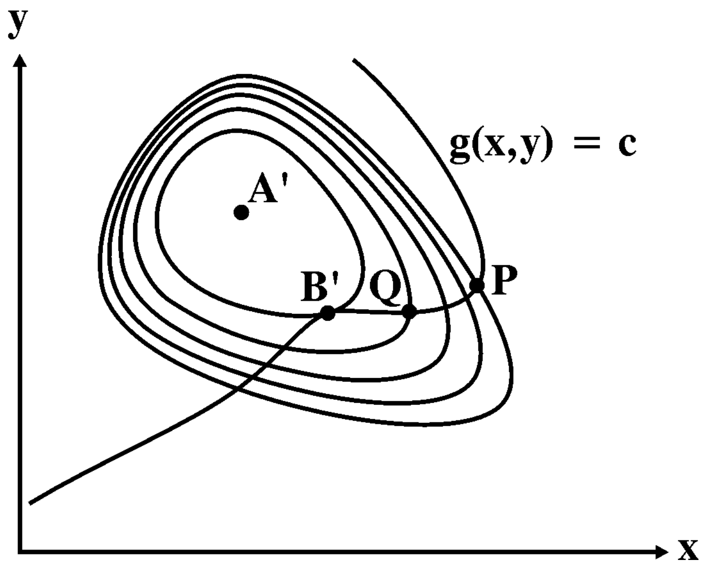


Az f(x,y) függvény konkáv; a PQ szakasz az f függvény gráfja alatt van.

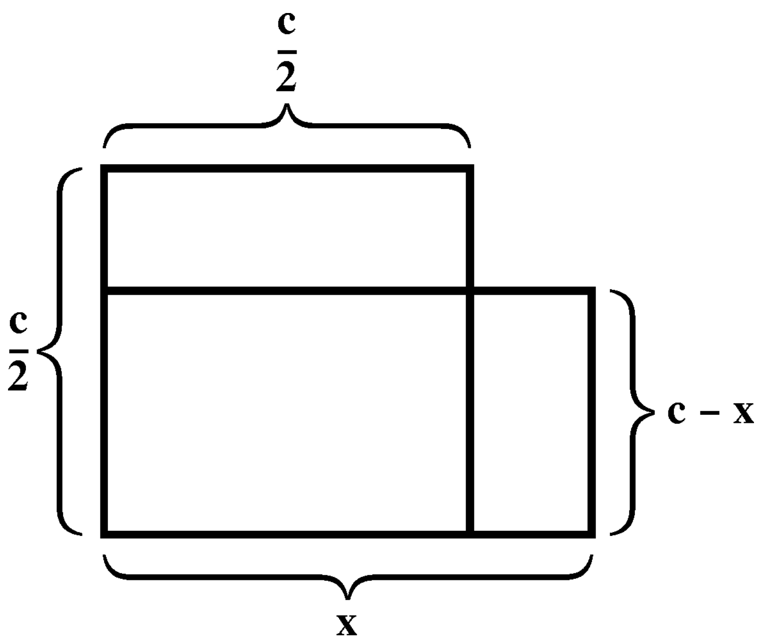
2.6
Feltételes maximum (térbeli ábrázolás)



2.7
Feltételes maximum (síkbeli ábrázolás)

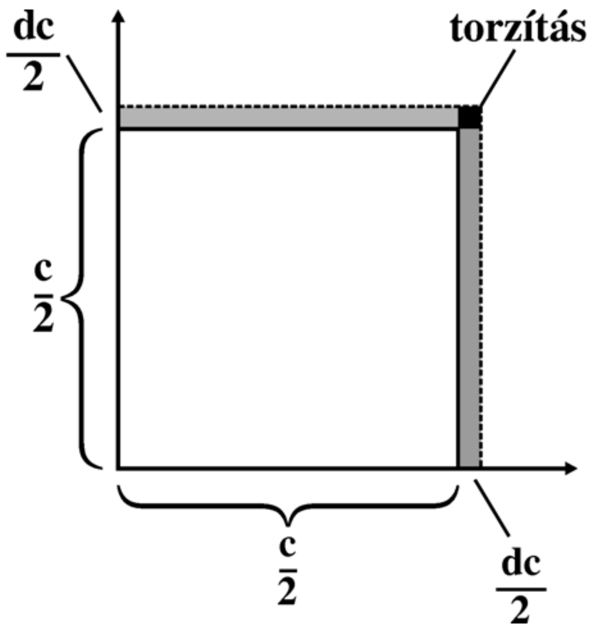


2.8
Adott kerület által határolt maximális terület



Kerület rögzítve = c
(számpéldával is lehet:
8 × 4 téglalap;
6 × 6 négyzet)

2.9
A korlátozó feltételek változásának hatása



$$dv \approx 2 \cdot \left(\frac{dc}{2} \cdot \frac{c}{2} \right)$$

$$= \frac{c}{2} dc$$

$$\lambda = \frac{dv}{dc} = \frac{\frac{c}{2} dc}{dc}$$

$$= \frac{c}{2}$$