MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI INTÉZET

AZ MTA-KTI
„A KÖZOKTATÁS TELJESÍTMÉNYÉNEK MÉRÉSE-ÉRTÉKELÉSE, AZ ISKOLÁK ELSZÁMOLTATHATÓSÁGA" PROGRAMJÁNAK

FERO
1401 SZÁMÚ PRODUKTUMA

A stabil párosítások szakirodalmának, ezen belül a felvételi rendszerek elemzéséhez kapcsolódó eredmények összefoglalása és ismertetése

Kóczy Á. László[1]

2008. november 30.

[1]Budapesti Műszaki Főiskola, Keleti Károly Gazdasági Kar, 1084 Budapest, Tavaszmező 15-17. Email: koczy.laszlo@kgk.bmf.hu

Tartalomjegyzék

Kivonat

Áttekintjük a párosítási mechanizmusokat külön tárgyalva az egy-az-egyhez és a sok-az-egyhez típusú párosításokat. Előbbiek vizsgálata meglehetősen egyszerű és itt a késleltetett elfogadási algoritmus (Gale és Shapley, 1962) nemcsak stabil párosítást eredményez, de kérő fél számára domináns a valódi preferenciák felfedése, tehát ez az algoritmus nem pusztán jó, de egyszerű is. A sok-az-egyhez párosításokra, azaz a tulajdonképpeni felvételi rendszerekre rátérve a helyzet némileg bonyolódik, hiszen itt az iskolák nemcsak hallgatók, de hallgatói csoportok felett is rendelkeznek preferenciákkal. Ezek ellenére a két modell sok ponton találkozik és ennek köszönhetően a hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmus hasonlóan kedvező tulajdonságokkal bír. Nem húzható rá azonban minden felvételi rendszerre: sok alternatív párosító mechanizmus van használatban, és ugyan ezek nagy része kedvezőtlenebb, mint a Gale-Shapley algoritmus, bizonyos helyzetekben a legjobb csere-körök módszere közelebb áll a mechanizmus valódi szándékával még akkor is, ha cserébe fel kell áldoznunk a stabilitást.

Kulcsszavak: stabil párosítások; Gale-Shapley algoritmus; stratégiai viselkedés; bostoni mechanizmus

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Prológus

Országonként más-más felsőoktatási felvételi rendszer szerint kerülnek a jelentkezők elhelyezésre, de számtalan központosított párosító mechanizmus létezik a közép-, sőt általános iskolai beiskolázásra, illetve például a medikusok rezidensi elhelyezésére. A mechanizmusok gyakran fekete dobozként működnek: miután a hallgatók bedobálják a kívánságlistát, a mechanizmus meghatározza ki-ki melyik iskolába kerül. Nagyobb baj az, hogy a mechanizmusok közül sok rendelkezik két előnytelen tulajdonsággal, vagy legalábbis ezek valamelyikével: Előfordul, hogy egy párosítás után egy hallgató jogos irigységet érez: van olyan iskola, ahol szívesebben tanulna és fel is vették volna, csak a mechanizmus miatt máshova került, esetleg meg sem fogalmazhatta ezen preferenciáját. A másik probléma még érezhetőbb: egyes mechanizmusokban rosszul járhat az, aki a valódi preferenciáit dobja be a gépbe, ugyanakkor ritkán világos, hogy hogyan kell a preferenciákat manipulálni ahhoz, hogy a legjobb iskolába sikerüljön bekerülni. Ez nem kis frusztrációt okoz mind a szülőknek, mind a jelentkezőknek.

Gale és Shapley (1962) cikke egy teljesen új terület alapjait fektette le. Kialakult egy matematikai modell, melynek segítségével kiértékelhetjük a felvételi rendszereket; a modell segítségével formalizálhatjuk a fent megfogalmazott tulajdonságokat, majd matematikailag igazolható ezen tulajdonságok megléte, vagy éppen hiánya. Az elmélet azt is igazolja, hogy tökéletes felvételi algoritmus nincs, azonban bizonyos speciális esetekben, melyek a gyakorlati példák jó részét lefedik, léteznek olyan javaslatok, melyek az ideálishoz nagyon hasonló eredményt produkálnak.

A továbbiakban bemutatjuk az Egyesült Államokban a rezidensek elosztásánál használt algoritmust, mint a klasszikus motiváló példát, majd rátérünk az elméleti modellre. Elsőként az egyszerűbb házassági modellt vizsgáljuk, ahol mindkét oldal pontosan egy ellenkező nemű egyeddel alkot egy párt. Ezután következik tulajdonképpen a felvételi rendszerek vizsgálata, ahol már megengedjük, hogy egy iskolának több hallgatója legyen. Megmutatjuk a két modell közti hasonlóságokat és eltéréseket, illetve részletesen elemezzük a bevezetőben használt NIMP algoritmust. Végül bemutatunk pár gyakorlatban is használt algoritmust, ezek gyengéit, illetve erősségeit.

1.2. Egy kis történelem

Felvételi rendszerben a párosítások elméletét elsőként az Egyesült államokban alkalmazták a medikusok rezidens képzésénél. A továbbiakban Roth (1984) nyomán áttekintjük a rezidens rendszer bevezetését, a kialakuló anomáliákat és hogy ezeket miként sikerült egy centralizált felvételi rendszerrel orvosolni.

A rezidens fogalma a XIX. és XX. század fordulóján a medikusok posztgraduális képzésének választható formájaként került bevezetésre. A lehetőség mindkét fél számára vonzó volt, hiszen a hallgatók számára lehetőséget adott a gyakorlati orvoslással való közelebbi megismerkedésre, a kórházakat pedig olcsó munkaerővel látta el. A kezdetektől fogva a rezidensi helyek száma meghaladta a jelentkező végzős orvostanhallgatók számát, így a kórházak között verseny alakult ki. Ez egyebek mellett abban nyilvánult meg, hogy a kórházak megpróbáltak a főbb versenytársak ajánlatainak megérkezése előtt megalkudni a jelentkezőkkel, és így a rezidensi felvételi a medikusképzés végéről egyre korábbra tolódott. Ez a fajta verseny egyik félnek sem volt előnyös, hiszen a hallgatók tanulás helyett álláskereséssel voltak elfoglalva, a kórházak pedig a medikusok tanulmányi eredményeinek ismerete nélkül voltak kénytelenek állásajánlatokat tenni. Bár e rendszer fonákságára többen felhívták a figyelmet, megfelelő szabályok és ösztönzők hiányában folyamat inkább gyorsulni látszott, mígnem 1944.-ben már csaknem két teljes évvel a végzés előtt szerződtek el rezidensnek. A folyamatot az Amerikai Orvosi Egyetemek Szövetsége (AAMC) azzal szabott gátat, hogy a továbbiakban a végzés várható ideje előtt legfeljebb egy évvel adtak ki igazolást tanulmányi eredményekről, illetve adtak ajánlóleveleket a hallgatóknak.

A hatás azonnali volt; az 1946.-ra vonatkozó rezidensi felvételekre jellemzően 1945 nyarán került sor, azonban hamarosan egy teljesen új probléma merült fel ezúttal az ajánlatokra adandó válasz határidejére vonatkozólag. Az érthetőség kedvéért képzeljünk el egy medikust, aki biztos ajánlatot kap egy kórháztól, ugyanakkor várólistás egy preferált intézményben. Természetesen a válaszadást addig szeretné húzni, amíg nem dől el véglegesen a preferált intézményben remélt hely sorsa. Az elhúzódó döntések, elsősorban az elutasítások miatt egyes ajánlatok olyan későn kerülhettek csak kiküldésre, hogy az érintett medikus már elfogadta egy más intézmény ajánlatát. Ha az új ajánlat kedvezőbb volt, előfordult, hogy a korábbi megállapodást megszegve elfogadták. A folyamat lerövidítésére újabb szabályok kerültek bevezetésre: 1945-ben tíz napban korlátozták az ajánlatok érvényességét, ez 1946-ra nyolc napra rövidült. Egy 1949-es AAMC javaslat szerint a határidőt 12 órára korlátozták volna, ezt azonban a kórházak elutasították azzal, hogy túl hosszú (majd 1950-ben lényegében elfogadták). Ekkora a kialakult rendszer szerint az ajánlatokat november 15.-én hajnali 0:01-kor kellett kézbesíteni és ezután állt rendelkezésre a fogadó intézmény által meghatározott türelmi idő, 1950-től pedig megtiltották a jelentkezőkkel való kommunikációt. Ekkorra világos lett, hogy a felvételi procedúra rövidebb és rövidebb időre való összezsúfolása aligha jelenthet végső megoldást és felvetették egy központi felvételi rendszer lehetőségét.

A központosított felvételi rendszer megengedi a hallgatók és a kórházak közötti kommunikációt, utóbbiak tájékoztatják a potenciális jelentkezőket a munkaköri leírásról, fizetésről és a munka egyéb feltételeiről. Ezek alapján a jelentkezők rangsorolják az intézményeket, az intézmények rangsorolják a jelentkezőket és a kettő alapján egy párosító mechanizmus határozza meg, hogy melyik hallgató, melyik kórházba kerül. A kísérletképpen 1950-51-ben még tét nélkül kipróbált, majd az 1951-52-es évtől kis változtatással bevezetett módszer, amit a program akkori elnevezése után NIMP (National Intern Matching Program) algoritmus néven ismerünk, a mai napig használatban van.

A változás a hallgatói képviseletek kritikáján alapult, akik felhívták a figyelmet arra, hogy az algoritmus túlságosan nagy jelentőséget szán annak, hogy egy hallgató mennyire őszinte a rangsor összeállításában, nevezetesen, egy hallgató rosszul járhat, ha egy erősen preferált, de számára elérhetetlen intézményt jelöl meg első helyen. Külön érdekes, hogy a változást nem tartották olyan jelentőségűnek, hogy erről a feleket széles körben értesíteni kellett volna.

A központi felvételi rendszert önkéntes alapon vezették be, azaz a felek szabadon megállapodhattak a rendszeren kívül is, és a korábbi tapasztalatok alapján világos volt, hogy még a résztvevők sem kötelezhetők a megállapodások betartására. Ennek tükrében nagy jelentőségű, hogy a kezdetektől a hallgatók/intézmények bő 95%-a részt vett a párosításban. Mára ez az arány 85%-ra mérséklődött elsősorban az orvos-házaspárok miatt, akik a rendszeren kívül kerestek mindkettőjük számára megfelelő megoldást.

A 90-es évek végén kisebb módosításokat vezettek be, így például a kezdeményezés a hallgatókhoz került. Bár ez elvben egy jelentős lépés, az elmúlt évek adatait vizsgálva Roth és Peranson (1997, 1999) arra jutottak, hogy javulást legfeljebb az esetek egy ezrelékében hoz a jelentkezők számára, így a lépés célja inkább a rendszerbe vetett bizalom növelése.

1.3. Kérdések és tanulságok

A fenti történet nem puszta történelem, hanem rendkívül tanulságos, rávilágít néhány olyan kérdésre, amivel a továbbiakban foglalkozni fogunk.

Először mégis tekintsük át, hogy mi *nem* tartozik a párosítások irodalmának kérdéskörébe. Míg a társadalom számára az lenne optimális, ha medikusok tanulmányaik végén az akkor kialakult minőségi rangsor alapján keresnének és kapnának rezidensi állásokat, a kórházak egyéni érdekei miatt ezek a megállapodások egyre korábbra tolódtak. A késői rezidensi piac tulajdonképpen egy közjószág, és a közjószágokhoz való önkéntes hozzájárulás (illetve annak hiánya) közismert és sokat tárgyalt probléma, tulajdonképpen egy sokszereplős fogolydilemmáról van szó.

Minket inkább két másik kérdés foglalkoztat:

1.3.1. Stabilitás

A kezdetektől probléma, hogy egyes jelentkezők a megállapodás után meggondolták magukat. Egy ilyen meggondolás hosszú láncreakciót indíthat el, hiszen a magát meggondolt medikus helye megüresedik, új rezidens kerülhet felvételre. Mivel a kórházak számára a decentralizált jelentkezések miatt valószínűleg nem ismert, hogy a jelentkezők közül kik találtak már állást maguknak, az új ajánlattal óhatatlanul felkeresnek olyanokat is, akik már leszerződtek egy kórházzal, de az új ajánlatot esetleg kedvezőbbnek találják. Mivel a hallgatók a kórházakat nem egyformán rangsorolják (a klinika híre mellett pl. elhelyezkedése is számít, de ugyanakkor a rezidensi állások munkafeltételei sem azonosak), bár bizonyos feltételek esetén a folyamat nem tart a végtelenségig, ez aligha vigasztalja a kórházakat, ha már 12 órás késlekedést is soknak tartottak.

Legalább ilyen fontos azokra a, létszámban legalább ilyen jelentős csoportot alkotó jelentkezőkre gondolni, akik vélt, vagy valós morális, vagy jogi kényszerből adódóan maradtak a korábban megkötött kevésbé kedvező megállapodásnál. Egy életre szóló keserűséget jelenthetnek a „mi lett volna, ha. . . ?” típusú kérdések, amikor valaki egy elit kórház ajánlatára mondott nemet egy korábbi kompromisszum miatt.

Már itt fontos hangsúlyozni, hogy ez a fajta késő bánat, vagy jogos irigység (Abdulkadiroğlu és Sönmez, 2003) nem a decentralizált rendszer hibája, vagy sajátossága. Mint erre látunk majd a való életből vett példát is, előfordulhat központi felvételi rendszerek esetén is. Itt a megállapodások nem időben követik egymást: a rendszer kidob egy párosítást. Ekkor létezhet olyan intézmény és hallgató, akik az eredményt látva a különmegállapodás mellett döntenek, tulajdonképpen ismét felrúgva a centralizált rendszer szabályait.

1.3.2. Őszinteség

Mielőtt egy hallgató benyújtja a jelentkezési lapot, vagy lapokat, első lépésként kialakít magában egy rangsort a megcélzott intézményekről. Akkor lesz a legboldogabb, ha az első helyen megjelölt intézménybe veszik fel. Ha ez nem sikerül, akkor a második hely a legjobb és így tovább. A kérdés, hogy ezek után valóban ebben a sorrendben célszerű-e az intézményekbe jelentkezni, vagy szükséges valamilyen stratégiát kialakítani, mely egy ettől eltérő rangsor megadásával jobb helyre juttatja be a pályázót. A fenti példában, ugyan a részletek nem ismertek, a hallgatók érdekképviselete jelezte, hogy az 1950-51-es próba során egy hallgató rosszul járt, ha elsőként egy nagyon jó, de számára elérhetetlen iskolát jelölt meg. Ez pedig egy teljesen világos példája annak, hogy az őszinteség nem kifizetődő.

Ez több problémát is felvet. Bár a morális szempontok sem irrelevánsak, itt sem erről az oldalról vizsgáljuk a kérdést. Az első kérdés nyilvánvalóan a nyerő stratégiáé: nagyjából ismerve a felvétel esélyeit, hogyan és hova érdemes jelentkezni, hogy a hallgató a legjobb kórházban kapjon helyet. Mindezt lényegesen bonyolíthatja, ha a hallgató pontos paraméterei (osztályzatok, vizsgaeredmények) még nem ismertek, illetve egyértelmű komplikáció, hogy a többi jelentkező stratégiájáról keveset tudunk. A kérdés túlmutat a jelen dolgozat keretein, de az eddigiek is jelzik, hogy nem nyilvánvaló kérdésről van szó és adott esetben a felvételi sikere legalább olyan mértékben függhet az alkalmazott stratégiától, mint a hallgató szakmai paramétereitől. Mivel a továbbiakban a rezidens szaktudására lesz szükség, az ügyes felvételi stratégia pedig szinte teljesen irreleváns, amennyiben az utóbbi szerepet kap a felvételi eredményében, létezhetnek olyan intézmények és hallgatók, akik szívesen megállapodnánk, és előbbi valamely felvett rezidensétől, utóbbi pedig kórházától válna meg cserébe. Ezzel pedig visszajutunk az első problémához.

2. fejezet

A házassági modell

2.1. Bevezetés

Miután ismertettük a párosítások irodalmának hátterét és motivációját, rátérünk a matematika modellek ismertetésére. Rögtön leszögezzük, hogy a matematika csak eszköz lesz, az eredmények nagyonis gyakorlatiak, világos, gyakran igen egyszerű válaszokat adnak világos kérdésekre. Mivel azonban a jelölés helyenként meglehetősen absztrakt az avatatlan olvasó számára, ezért az általánosabb modell helyett egy egyszerűbb bevezetésével és tárgyalásával kezdjük. Mint majd látni fogjuk, az egyszerű modell eredményei szinte kivétel nélkül általánosíthatók.

Most már iskolákról és felvételizőkről beszélve az egyszerűsítés annyi, hogy feltételezzük, hogy minden iskola pontosan 1 hallgatót vehet fel. A nyilvánvaló párhuzam miatt ezt a fajta párosítási modellt házassági modellnek nevezzük, ahol a férfiak a hallgatók, a nők az iskolák, vagy fordítva. Egy házaspár pontosan egy férfiból és egy nőből áll. Feltételezzük még, hogy egy férfi és egy nő pontosan akkor házasodik össze, ha ezt mindkét fél akarja. Konkrétan minden férfi, illetve nő maradhat nőtlen, illetve hajadon, ha valamilyen oknál fogva nem találnak elfogadható házastársat, vagy a szóbajövő jelöltek már mind elkeltek. Nem zárjuk a válás lehetőségét a modellből, ugyanakkor világos, hogy stabil párosítások esetén válásra nem lesz szükség.

2.2. A matematikai modell alapjai

Abból indulunk ki, hogy a párosítás résztvevői egyértelműen két csoportra oszthatók: egyértelmű, hogy ki iskola és ki hallgató, illetve, hogy ki férfi és ki nő. Házassági modellről lévén szó, az utóbbi megkülönböztetést fogjuk használni, de természetesen a jelölés absztrakt, jelölhet bármit. Ennek megfelelően a férfiak és nők diszjunkt, azaz átfedés nélküli halmazát (csoportját) M illetve W jelöli, míg egy egyedet m, illetve w. A különböző férfiakat, illetve nőket egymástól egy alsó indexszel fogjuk megkülönböztetni. Azt is feltételezzük, hogy véges számú férfiról, illetve nőről van szó, számuk rendre n, illetve p, tehát $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$, illetve, $W = \{w_1, w_2, ..., w_p\}$.

Feltételezzük azt is, hogy minden férfi és nő rangsorolja az ellenkező nem képviselőit. A rangsor azt fejezi ki, hogy hogyan választana, amennyiben választania kellene. Amikor tehát azt mondjuk, hogy az m férfi a w_1 nőt preferálja a w_2 nővel szemben, az azt jelenti, hogy a $\{w_1, w_2\}$ halmazból választva w_1-t választaná, továbbá, hogy a halmazt bármilyen elemekkel bővítve w_2-t sosem választja. Ezt a preferencia relációt $w_1 >_m w_2$ is felírhatjuk.

Megengedjük azt is, hogy valaki ne válasszon, hanem nőtlen, vagy hajadon maradjon. Ennek kifejezésére egy m férfi $P(m)$ preferenciáit a $W \cup \{m\}$ halmazon fogjuk értelmezni, azaz formailag, aki nem házasodik, az saját magával lép frigyre. Általában megengedjük azt is, hogy valaki a másik nem egyes tagjai között indifferens legyen. Mivel azonban ez egy felvételi rendszerben nehezen értelmezhető, ennek az esetnek a tárgyalásától itt most eltekintünk. Feltételezzük, hogy a relációk teljesen rendezettek, azaz egyrészt az ellenkező nem bármely két képviselője összehasonlítható, azaz meghatározható melyikőjük preferált, másrészt a preferencia-reláció tranzitív, azaz ha $w_1 >_m w_2$ és $w_2 >_m w_3$ akkor $w_1 >_m w_3$. Az ilyen preferenciákat és gazdáikat racionálisnak nevezzük. A továbbiakban racionális preferenciákkal dolgozunk. Ezek felírhatók egyszerű felsorolással, például:

$$P(m) = w_1, w_2, m, w_3, ..., w_p,$$

Mivel azonban azok a hölgyek, akik körében szívesebben választja m úr a nőtlenséget a további érvelést nem fogja befolyásolni, a jelölést némileg egyszerűsítve

$$P(m) = w_1, w_2.$$

Hasonló egyszerűsítést végezhetünk a felsőoktatási felvételik esetében is, hiszen azon iskolák rangsorolására nincs szükség, illetve egy ilyen rangsor irreleváns, melyek helyett inkább a nem tanulást választja. Fordítva szintén igaz: azon hallgatók rangsorolása, akiket az iskola biztosan nem vesz fel, irreleváns.

Folytatva a jelölések bevezetését. Ha a fenti jelölést használjuk az egyes férfiak és hasonlóan a nők számára, akkor jelölje P a párosítás összes résztvevőjének a preferenciáit. Így

$$P = \{P(m_1), P(m_2), ..., P(m_n), P(w_1), P(w_2), ..., P(w_p)\}.$$

A társkereső piacot az (M, W, P) hármassal jelöljük.

A társkereső piac eredménye a házasságok valamely halmaza, ahol továbbra is megengedjük az egyedülállókat. Matematikailag ezt a következőképpen írjuk fel:

2.1. Definíció (Párosítás). *Párosításnak a $M \cup W$ olyan μ önmagára való másodfokú leképezését[1] értjük, melyre $\mu(m) = m$, vagy $\mu(m) \in W$, illetve $\mu(w) = w$, vagy $\mu(w) \in M$. $\mu(x)$ az x házastársát, vagy egyszerűen társát jelöli.*

Egy párosítást felírhatunk a párok halmazaként, például a

$$\mu = \begin{matrix} w_1 & w_2 & (m_3) \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{matrix}$$

párosításban m_1 házastársa w_2, m_2 házastársa w_1, m_3 pedig nőtlen. A párosításban a párokat tetszőleges sorrendben felírhatjuk, praktikus okokból a férfiak, vagy a nők sorrendjét követjük. Egy adott x egyén két párosítás, μ és ν összehasonlításakor a két házastárs $\mu(x)$ illetve $\nu(x)$ preferenciasorrendjét alkalmazza, tehát pontosan akkor $\mu >_x \nu$ ha $\mu(x) >_x \nu(x)$. Itt azt fontos aláhúznunk, hogy a modellben nincs irigység, vagy más externáliák.

[1] Azaz $\mu^2(x) = x$, tehát x házastársának a házastársa x – ez akkor is igaz, ha x egyedülálló, azaz önmaga házastársa.

2.3. Stabilitás

Miután bevezettük a jelölést és az alapfogalmakat rátérünk az első fő kérdésre, amit az 1.3.1 szakaszban már felvetettünk: a stabilitásra.

2.3.1. Egyéni racionalitás

A párosítás egyik alapfeltételezése az volt, hogy mindenki maradhat egyedülálló. Tegyük fel, hogy a μ párosítás m-t w-vel házasítja. Tegyük fel azt is, hogy $m >_m w$, azaz ha m a w-vel való házasság és a nőtlenség között választhat, akkor az utóbbit választaná. Vegyük észre, hogy ahhoz, hogy m nőtlen maradjon, nincs szüksége senkinek a beleegyezésére. Azt is tudjuk, hogy a házasság a felek kölcsönös beleegyezése alapján jöhet csak létre. A fentiek alapján aligha remélhetjük, hogy m beleegyezik a w-vel való házasságba, hiszen azzal, ha nemet mond, automatikusan egy másik párosítás jön létre, ahol ő nőtlen marad, amit ő preferál. Tehát m blokkolja a μ párosítást.

Mivel az ilyen típusú blokknak nincsen semmilyen akadálya, kizárólag olyan párosításokkal érdemes foglalkozni, melyek mentesek az ilyen típusú blokkoktól. A tulajdonságot a kooperatív játékelméletből ismert hasonló koncepció után egyéni racionalitásnak nevezzük.

2.2. Definíció (Egyéni racionalitás). *Egy párosítás egyénileg racionális ha minden egyén elfogadható a párja számára, azaz ha egyik egyed sem blokkolja.*

Bár az egyéni racionalitás jogos elvárás, azonban rögtön felmerül a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán olyan párosítás, ami teljesíti ezt a feltételt. Fontos, hogy olyan párosító mechanizmust keresünk, amely minden társkereső piacra működik.

Jelen esetben a válasz pozitív, hiszen az a párosítás, mely minden egyedet önmagával párosít, definícióból adódóan egyénenként racionális. Nos, ez a párosítás, – ha egyáltalán nevezhető annak – aligha az, amit kerestünk. Természetesen sok más egyénileg racionális párosítás is létezik, illetve létezhet. A továbbiakban egy hasonló, ám már a párokra vonatkozó stabilitási tulajdonságot fogunk vizsgálni.

2.3.2. Stabil párosítások

Definíció

Kiindulva a csupa szingliből feltételezhetjük, hogy az egyedek azért vesznek részt ezen a társkereső piacon, mert társat keresnek, azaz valószínűleg több olyan nő, illetve férfi van, akikkel szívesebben lennének összepárosítva, mint önmagukkal. Vagy, általánosabban megfogalmazva, tegyük fel, hogy valamely μ párosítás során létezik egy olyan m férfi, és egy w nő, hogy $w >_m \mu(m)$ és $m >_w \mu(w)$, azaz m szívesebben házasodna w-vel, mint kijelölt partnerével, és hasonlóan w szívesebben házasodna m-mel, mint $\mu(w)$-vel. Feltételezve, hogy még egyikőjük sem kötelezte el magát, csupán egy társkereső dobta ki ezeket a kombinációkat, akkor megint érvényes a fenti gondolatmenet, hogy aligha kényszeríthetjük m-t és w-t a mással való házasságra. Fontos hangsúlyozni, hogy egy ilyen típusú blokk sokkal bonyolultabb, hiszen itt az egyoldalú szakítás önmagában nem üdvös, kell hozzá a kiszemelt partner hasonló lépése is. Ezzel együtt, ha megengedjük a felek között a kommunikációt, feltételezhetjük, hogy azok a párosítások, ahol ilyen blokkok előfordulhatnak, nem hosszú életűek.

2.3. Definíció (Stabil párosítás). *Egy párosítást akkor nevezünk* stabilnak*, ha sem egyének sem párok nem blokkolják.*

A stabil párosítások gondolata is rendelkezik kooperatív játékelméleti párhuzammal, általános megfelelője a mag (Scarf, 1967).

Világos, hogy ha egy házasságközvetítő stabil párosítást javasol ügyfeleinek, akkor hiába elégedetlen az egyik érintett, nem fog olyan partnert találni, akivel jobban járna és aki hajlandó lenne a közvetítő javaslatát felrúgni a javasolt kalandért. Fontos hangsúlyozni, hogy ha az érintettek kötelesek elfogadni a javaslatot, akkor a párosítás stabilitásának nincs igazán jelentősége (legfeljebb bánhatják, hogy nem máshogy alakult), viszont ha nem, akkor csak stabil párosításokat érdemes javasolni.

Tehát csak és kizárólag stabil párosításokkal érdemes foglalkozni. Létezik-e ilyen párosítás?

A késleltetett elfogadási algoritmus

Mielőtt a válaszra rátérnénk, tisztáznunk kell, milyen feltételek mellett tesszük fel ezt a kérdést. Minden párosítás stabil, ha a férfiak és nők nem ismerik egymást, illetve egymás preferenciáit, hiszen ekkor csak akkor érdemes biztosan visszautasítani egy házassági ajánlatot, ha annál még az egyedüllét is jobb. Mi ennél egy picit érdekesebb esetre keressük a válasz, még akkor is, ha a feltételezés nem mindig reális: A felek tökéletesen ismerik egymás preferenciáit.[2]

Ez már egy jól definiált probléma és van egy jó hírünk: létezik stabil párosítás. Ennek igazolására semmi sem egyszerűbb, mint megmutatni a stabil párosítást. Természetesen a kérdés tetszőleges számú férfi és nő, illetve tetszőleges preferenciaprofil (összegezve: tetszőleges (M, W, P)) esetén felmerül, tehát a konkrét megoldás helyett a megoldásra vezető algoritmust fogjuk leírni.

2.4. Tétel. *(Gale és Shapley, 1962) Minden társkereső piacnak van stabil párosítása.*

Bizonyítás. A stabil párosítás az alábbi algoritmussal határozható meg:

1. Minden olyan férfit, aki számára nincs elfogadható nő, magával párosítjuk, azaz ezek a férfiak nőtlenek maradnak. A továbbiakban ezektől a férfiaktól eltekintünk.

2. Minden más férfi megkéri a számára legszimpatikusabb elérhető hölgy kezét. Utóbbi alatt azt a férfi által legmagasabbra rangsorolt hölgyet értjük, aki még nem kosarazta ki.

3. A nők kérőik közül a preferálttal eljegyzik egymást.

4. Az elfogadható hölggyel nem rendelkező férfiakat önmagával párosítjuk. Ők a további játékban nem vesznek részt.

5. Az eljegyzetlen férfiak (akár a 2. lépésben) megkérik a legszimpatikusabb elérhető hölgy kezét.

6. A nők kérőik és az esetleges jegyesük közül a preferálttal eljegyzik egymást (automatikusan felbontva az esetleges korábbi eljegyzést).

[2] Illetve nekünk tulajdonképpen az is elegendő, ha a preferenciák kiderülhetnek.

7. Ha van olyan férfi, akit szíve választottja kikosarazott, visszatérünk a 4. lépéshez.

8. Egyébként az algoritmus véget ér. Ekkor minden férfi vagy magányos, hiszen minden elfogadható hölgy kikosarazta, vagy el van jegyezve a legutóbbi leánykérés tárgyával.

Az algoritmus végén a jegyesek összeházasodnak és boldogan élnek amíg meg nem halnak; azok a nők, akik nem kaptak (elfogadható) házassági ajánlatot, illetve azok a férfiak, akik „kifogytak" az elfogadható hölgyismerősökből, magányosan élik le életüket.

Már csak két feladatunk van: igazolni, hogy az algoritmus véget ér, és hogy a kapott párosítás valóban stabil.

Előbbi könnyen igazolható: vegyük észre, hogy az algoritmus során egy férfi ugyananannak a nőnek csak egyszer kérheti meg a kezét. Ha ugyanis egyszer már elutasításra kerül, az algoritmus definíciója miatt annál a hölgynél többet nem próbálkozik. (Ez érthető, hiszen a preferenciák tranzitivitása miatt aligha remélheti, hogy egy újabb próbálkozással szerencsésebb lesz). Mivel minden körben legalább egy férfi megkéri valamely nő kezét, és mivel a lehetséges lánykérések száma véges, ezért ennél nem is lehet több lánykérés az algoritmus futása alatt, tehát az algoritmus véget ér.

A stabilitás bizonyításához tegyük fel, hogy valamely m férfi szívesebben házasodna w-vel, mint az algoritmus által meghatározott $\mu(m)$-mel, azaz $w >_m \mu(m)$. Ekkor w elfogadható m számára és m az algoritmus során megkérte w kezét. Az tehát, hogy nem házasodtak össze csak úgy lehetséges, hogy w akkor, vagy egy átmeneti eljegyzés után talált egy másik m' férfit, melyre $m' >_w m$. Ez a férfi vagy w későbbi házastársa, tehát $m' = \mu(w)$, vagy szintén elutasításra került, és így (a tranzitivitást felhasználva) $\mu(w) >_w m'$. Mindkét esetben igaz tehát, hogy $\mu(w) >_w m$, azaz m és w nem blokkolják a párosítást. A történethez egy tetszőleges férfit választottunk ki, azaz bármilyen párra alkalmazható. Végül, mivel a férfiak csak elfogadható nők kezét kérik meg, a nők pedig az elfogadhatatlan férfiakat kikosarazzák az egyéni racionalitás is teljesül. □

A fenti procedúrát késleltetett elfogadási algoritmusnak is nevezzük, hogy hangsúlyozzuk a tényt, hogy a nők nem kötelesek azonnal elfogadni a pillanatnyilag legjobb ajánlatot. A jobb érthetőség céljából tekintsük a következő példát (Roth és Oliveira Sotomayor, 1990, 29. oldal):

1. Példa (Példa a késleltetett elfogadási algoritmusra.).

Az alábbi (M, W, P) társkereső piacot vizsgáljuk:

$$\begin{aligned}
P(m_1) &= w_1, w_2, w_3, w_4 \\
P(m_2) &= w_4, w_2, w_3, w_1 \\
P(m_3) &= w_4, w_3, w_1, w_2 \\
P(m_4) &= w_1, w_4, w_3, w_2 \\
P(m_5) &= w_1, w_2, w_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(w_1) &= m_2, m_3, m_1, m_4, m_5 \\
P(w_2) &= m_3, m_1, m_2, m_4, m_5 \\
P(w_3) &= m_5, m_4, m_1, m_2, m_3 \\
P(w_4) &= m_1, m_4, m_5, m_2, m_3
\end{aligned}$$

- Minden férfi számára van elfogadható nő.
- m_1, m_4, m_5 megkéri w_1, m_2 és m_3 pedig w_4 kezét.
- w_1 a kérői közül m_1-t, w_4 pedig m_2-t jegyzi el, m_4, m_5 és m_3 elutasításra kerül. A dolgok jelenlegi állása szerint a párosítás a következőképpen alakul:

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & & & m_2 \end{array}$$

- Most a kikosarazott férfiak újra választanak. m_3, m_4, és m_5 rendre w_3, w_4 és w_2 kezét kéri meg.
- Mivel $m_4 >_{w_4} m_2$ ezért w_4 elutasítja korábbi jegyesét és helyette m_4-t jegyzi el. Most a párosítás így néz ki:

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_5 & m_3 & m_4 \end{array}$$

- A kikosarazott m_2 most w_2 kezét kéri meg és ezzel kiüti helyéről m_5-öt. Így

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{array}$$

- Most m_5 a harmadikként preferált w_4-nél próbálkozik, aki azonban kikosarazza. Mivel minden számára elfogadható nő kikosarazta, nőtlen marad, s ezzel kialakul a végleges párosítás:

$$\mu_M = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

A fenti párosítást μ_M-mel jelöljük hangsúlyozva, hogy itt a férfiak voltak a kezdeményezők (leányvásár). Legényvásár esetén más párosítást kapunk, ami természetesen szintén stabil:

$$\mu_W = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_1 & m_5 \end{array}$$

Nem nyilvánvaló és talán némileg meglepő, hogy minden férfi az első, minden nő az utóbbi párosítást preferálja. Mint látni fogjuk ez egy általánosan érvényes tulajdonság.

2.3.3. Párosítások és preferenciák

2.5. Definíció. *Egy adott (M, W, P) házassági piacra a μ stabil párosítás M-optimális, ha minden férfi számára legalább olyan kedvező, mint bármely másik μ' stabil párosítás, azaz $\mu \geq_M \mu'$. Hasonló módon ν W-optimális, ha minden nő számára legalább olyan kedvező, mint bármely másik ν' stabil párosítás, azaz $\nu \geq_W \nu'$.*

Ez azt jelenti, hogy μ *minden egyes* férfi számára jobb (vagy nem rosszabb), mint bármely más stabil párosítás. Bár μ, illetve ν nem a legjobb párosítás minden egyes férfi, illetve nő számára, mondhatjuk azt, hogy az elérhető legjobb.

Tekintve, hogy a párosítások során a férfiak, illetve a nők egymással versenyeznek a másik nem képviselőiért, azt gondolhatnánk, hogy olyan párosítás, ahol érdekeik mégis találkoznak, nem, vagy igen ritkán létezhet. Igen meglepő tehát a következő eredmény, melyben Gale és

Shapley (1962) igazolják, hogy ilyen párosítás pedig igenis létezik! A tételt bizonyítás nélkül közöljük.

2.6. Tétel. *Minden (M, W, P) társkereső piacra létezik M-optimális és W-optimális párosítás is és ezek pontosan a késleltetett elfogadási algoritmus által leányvásár, illetve legényvásár esetén meghatározott μ_M, illetve μ_W stabil párosítások.*

Knuth (1976) azt is igazolta, hogy μ_M a nők számára, μ_W pedig a férfiak számára a lehető legrosszabb stabil párosítás. Általánosan is igaz, hogy ami a férfiaknak jobb, az a nőknek rosszabb és fordítva.

2.4. Piacok és tulajdonságaik

Az eddigiekben egy adott társkereső piac tulajdonságait vizsgáltuk. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy hogyan reagálnak ezek a tulajdonságok a piac változásaira, illetve hogy viszonyulnak egyes piacok egymáshoz. Az alábbi példák megfigyelései általános érvényűek; az általános tételeket Gale és Sotomayor (1985a,b) igazolta.

2.4.1. Preferenciák bővítése

Az egyik ilyen lehetséges összehasonlítás azt vizsgálja, mi történik akkor, ha például a férfiak megváltoztatják preferenciáikat. Ezen belül azt a speciális esetet vizsgáljuk, amikor az eddigiek mellett további nők lesznek elfogadhatók (azaz a velük való házasság jobb, mint az egyedüllét). Vegyük a következő példát (Roth és Oliveira Sotomayor, 1990, 39. o.):

2. Példa. *Példa a preferenciák bővítése*

$$
\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_1, w_3 & P(w_1) = m_2, m_1, m_6 \\
P(m_2) = w_2, w_4 & P(w_2) = m_6, m_1, m_2 \\
P(m_3) = w_4, w_3 & P(w_3) = m_3, m_4, m_1, m_5 \\
P(m_4) = w_3, w_4 & P(w_4) = m_4, m_3, m_2 \\
P(m_5) = w_5 & P(w_5) = m_5 \\
P(m_6) = w_1, w_4 &
\end{array}
$$

Ekkor

$$
\mu_M = \begin{array}{cccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & (m_6) \\ m_1 & m_2 & m_4 & m_3 & m_5 & m_6 \end{array} \qquad \mu_W = \begin{array}{cccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & (m_6) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \end{array}
$$

Tegyük fel, hogy ezek után egyes férfiak kiterjesztik az elfogadható feleségek halmazát:

$$
\begin{array}{l}
P'(m_1) = w_1, w_3, w_2 \\
P'(m_2) = w_2, w_4, w_1 \\
P'(m_3) = w_4, w_3, w_2 \\
P'(m_4) = w_3, w_4 \\
P'(m_5) = w_5, w_3 \\
P'(m_6) = w_1, w_4, w_2
\end{array}
$$

Ekkor a stabil párosítás a következőképpen változik.

$$
\mu'_M = \begin{array}{cccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & (m_1) \\ m_2 & m_6 & m_4 & m_3 & m_5 & m_1 \end{array} \qquad \mu'_W = \begin{array}{cccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & (m_1) \\ m_2 & m_6 & m_3 & m_4 & m_5 & m_1 \end{array}
$$

Láthatjuk, hogy az eredeti P preferenciákat alapul véve semelyik férfi nem jár jól a változtatással.

2.4.2. A résztvevők változása

A következő példa azt az általánosan is megfogalmazható és az intuíciónak is megfelelő tulajdonságot illusztrálja, hogy egy új nő érkezésével egyik férfi sem járhat rosszul:

3. Példa (Példa új szereplő érkezése).

Vegyük a következő 3-3 nőből és férfiból álló piacot:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_1, w_3 & P(w_1) = m_1, m_3 \\ P(m_2) = w_3, w_2 & P(w_2) = m_2 \\ P(m_3) = w_1, w_3 & P(w_3) = m_3, m_2 \end{array}$$

Ebben az esetben egyetlen stabil párosítás létezik, mely egyszerre M- és W-optimális.

$$\mu_M = \mu_W = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array}$$

Tegyük fel, hogy új nő, w_4 jelenik meg a piacon és $w_4 >_{m_1} w_1$, azaz a piac $(M, W \cup \{w_4\}, P')$, ahol

$$\begin{array}{ll} P'(m_1) = w_4, w_1, w_3 & P'(w_1) = m_1, m_3 \\ P'(m_2) = w_3, w_2 & P'(w_2) = m_2 \\ P'(m_3) = w_1, w_3 & P'(w_3) = m_3, m_2 \\ & P'(w_4) = m_2, m_1 \end{array}$$

Most is csak egyetlen stabil párosítás létezik:

$$\mu'_M = \mu'_W = \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_3 & (w_2) & m_2 & w_1 \end{array}$$

Mint látható, P' szerint minden férfi preferálja μ'_M-t.

Az előző példa azt is mutatja, hogy a férfiaknak nem érdeke az, hogy valódi preferenciáik helyett a módosított preferenciákat adják meg. A következő szakaszban az őszinteség, vagy sokkal inkább a stratégiai őszintétlenség kérdésével foglalkozunk.

2.5. Őszinteség és stratégiai kérdések

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a társkereső piac résztvevői mindig pontosan a preferenciáik szerint cselekszenek. Például, tegyük fel, hogy a késleltetett elfogadási algoritmusban a férfiak bármely nőnek megkérhetik a kezét, a nők pedig bármelyik kérő ajánlatát elfogadhatják. Vajon ekkor mindig a preferenciáik szerint fognak cselekedni?

Vagy, ha a döntést egy központosított rendszerre, egy házasságközvetítőre bízzuk, vajon a résztvevők valódi preferenciáikat fogják-e megadni?

Ha bármelyik kérdésre „nem” a válasz, akkor adódhatnak olyan helyzetek, amikor valamely résztvevő kedvezőbb házastárssal kerül párosításra, amennyiben a házasságközvetítőt félrevezeti preferenciáit illetőleg. Az ilyen viselkedést *stratégiai viselkedésnek* nevezzük. A két kérdés természetesen szorosan összefügg. Ha ugyanis az első kérdésre ‘igen’ a válasz, akkor, mivel a közvetítő a megadott preferenciák alapján tulajdonképpen ugyanazokat a lépéseket teszi meg a résztvevők képviseletében, amit ők maguk tennének, tehát ekkor a résztvevők a házasságközvetítőnek is a valós preferenciákat fogják megadni.

A kérdésre nagyon könnyen megadhatjuk a választ, ehhez elegendő a következő példát megvizsgálni:

4. Példa. *Ahol az őszintétlenség jövedelmező*

Vegyük ismét az 1 példát. Mint emlékezetes, az alábbi M-optimális párosítást kaptuk:

$$\mu_M = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

azaz w_1 m_1-gyel lett összepárosítva, aki az ő harmadik választása.

Most vizsgáljunk egy módosított (M, W, P') piacot, ahol

$$P'(w_1) = m_2, m_3, m_4, m_5, m_1,$$

míg minden más egyén esetében megegyezik P-vel. Emlékeztetőül

$$P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5.$$

Ekkor az alábbi párosítást kapjuk:

$$\mu'_M = \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & (m_5) \\ m_3 & m_1 & m_2 & m_4 & m_5 \end{array}$$

Láthatjuk, hogy itt w_1 párja m_3, ahol $m_3 >_{w_1} m_1$, tehát az őszintétlenség lehet kifizetődő.

Ez mindenképpen rossz hír, de szeretnénk tudni, hogy mennyire. Mik az őszintétlenség okai? Kik lesznek/lehetnek őszintétlenek? Léteznek olyan piacok, ahol az őszinteség mindig kifizetődő? Végül felmerül az a kérdés is, hogy mindez hogy egyeztethető össze a stabil párosítások elméletével. Ott ugyanis a résztvevők által megadott preferenciák szerint alakul ki egy stabil párosítás: ha ezeket rendszeresen valótlanul adják meg, semmit nem tudunk a stabilitásról az *eredeti*, *valós* preferenciák tükrében.

Ahhoz, hogy ezekre választ adjunk, be kell vezetnünk egy általános stratégiai modellt.

2.5.1. Stratégiai modell

Ismét egy (M, W, P) társkereső piacot vizsgálunk. Feltételezzük, hogy van egy házasságközvetítő, aki valamilyen algoritmus és a jelentkezők megadott preferenciái alapján készít egy párosítást. Feladjuk tehát az idealista elképzelést, hogy mindenki a valós preferenciáit fogja megadni, bár éppen arra törekszünk majd, hogy rábírjuk az érintetteket az őszinteségre. A megadott preferenciák profilját Q-val jelöljük és a közvetítő ezen preferenciák függvényében készíti el a $\mu = h(Q)$ párosítást.

Egy pillanatra úgy tűnhet, hogy kihagytunk egy lépést. Miért bízzuk hirtelen a közvetítőre a párosítást? A két módszer között lényegi különbség nincs, hiszen most a piac résztvevői nem árulnak el többet, mint hogy az egyes helyzetekben hogyan cselekednének, míg e lépések célja rejtve marad a közvetítő előtt.

Ez a megközelítés megfelel a játékelméletben is ismert stratégiai, vagy normális modellnek. Ennek alkotói egyrészt a játékosok, azaz a házasulandók, a *lehetséges* preferencia-profilok halmaza, a közvetítő által alkalmazott leképezés, mellyel a megadott preferenciákból párosítást képez, végül pedig a résztvevők valós preferenciái, mellyel a kapott párosítást kiértékelik.

A legjobb válasz

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért egy tipikus házasulandót i-vel jelöljük, függetlenül a nemétől. Mivel a Q tulajdonképpen a résztvevők stratégiai döntéseit összegzi, ezért az egyszerűség kedvéért a résztvevők stratégia profiljának nevezzük. Ezen belül i stratégiáját

Q_i-vel, a többi játékos stratégia profilját pedig Q_{-i}-vel jelöljük. Ekkor $Q = (Q_i, Q_{-i})$, vagy $Q' = (Q'_i, Q_{-1})$ a Q profiltól csak i megadott preferenciáiban tér el, míg a többiek megadott preferenciái változatlanok.

Ekkor a többiek adott Q_{-i} stratégiájára adott Q^*_i stratégiát *legjobb válasznak* nevezzük, ha bármilyen Q_i-t választva

$$h(Q^*_i, Q_{-i}) \geq_i h(Q_i, Q_{-i}).$$

A legjobb válasz nem feltétlenül egyértelmű, azaz lehet több legjobb válasz is, ezek természetesen ugyanazt a párt eredményezik i-nek.

Ha valamely Q^*_i *minden* Q_{-i}-re legjobb válasz, akkor *domináns stratégiának* nevezzük.

Lehetetlenségi tétel

Most rátérünk a közvetítő által használt algoritmus vizsgálatára. Minket tulajdonképpen csak az algoritmus bemenete és eredménye érdekel, míg az algoritmus részletei érdektelenek. Így szerencsésebb az algoritmus helyett a *párosító mechanizmus* elnevezés, formailag egy h függvényről van szó, ami egy tetszőleges (M, W, P) piachoz egy $h(Q)$ párosítást rendel.

Egy párosító mechanizmus *Pareto-optimális*, ha minden piachoz Pareto-optimális[3] párosítást rendel.

Egy párosító mechanizmus stratégia-biztos, ha a mechanizmus jelenlétében az egyedek valós preferenciáikat adják meg, azaz ha a mechanizmus eredményét, a párosítást nem befolyásolja az a tény, hogy megengedjük a valótlan preferenciák megadását is. Mivel ekkor a résztvevők felfedik valós preferenciáikat, az ilyen mechanizmusokat revelációs mechanizmusoknak is nevezzük.

A kérdés az, hogy a most bevezetett tulajdonságok mennyiben összeegyeztethetők egymással, illetve a stabilitással. Roth (1982) ezen kapcsolatokat vizsgálta és bár vannak jó hírek is, a fő konklúziója negatív.

- Nincs olyan párosító mechanizmus, mely stratégia-biztos és stabil párosítást eredményez.
- Léteznek ugyanakkor olyan mechanizmusok, melyek stabil párosítást eredményeznek, ugyanakkor a férfiak, vagy a nők felfedik valós preferenciáikat.

[3] Egy μ párosítás Pareto-optimális, ha bármely más $\mu' \neq \mu$ párosításhoz létezik olyan i egyed, hogy $\mu' <_i \mu$.

- Léteznek továbbá stratégia-biztos, Pareto-optimális mechanizmusok.

5. Példa (Stratégia-biztos Pareto-optimális mechanizmus).

Állítsuk a férfiakat sorba: $m_1, m_2, \ldots$. Vizsgáljuk a következő mechanizmust: m_1 a számára legkedvesebb hölgyet választja. m_2 a maradékból választhat, ... és így tovább. Világos, hogy a férfiaknak érdekében áll preferenciájuk felfedése. Ugyanakkor a nők preferenciája nem befolyásolja a végeredményt, tehát fel nem fedése sem, azaz a nőknek sem áll érdekükben stratégiai megfontolásokhoz nyúlni. A Pareto-optimalitás pedig garantált, hiszen minden férfi a számára legkedvesebb nőt választotta: bármely más párosítással valamelyikük rosszabbul jár.

Ilyen mechanizmus a National Football League Draft (Wikipedia, 2008), ahol az NFL csapatai a végzős játékosokkal szerződhetnek le. Itt a csapatok sorrendjét az előző szezonban elért eredményük határozza meg, lényegében fordított erősorrendben választanak. Hasonló módon az Egyesült Államok Tengerészeti Akadémiájának végzős kadétjai tanulmányi eredményeik szerinti rangsorban választhatnak a betöltendő pozíciók közül.[4]

Ennek némileg módosított változatát, a véletlen sorozatos diktatúrát a gyakorlati élet sok területén alkalmazzák (Abdulkadiroğlu és Sönmez, 1998, 1999). Ebben véletlen sorrendbe állítjuk a hallgatókat, és eszerint a sorrend szerint választhatják az általuk legjobbnak ítélt, még elérhető iskolát.

2.7. Tétel (Lehetetlenségi tétel). *(Roth, 1982) Nincs olyan stabil párosító mechanizmus, melyben a valós preferenciák felfedése domináns stratégia.*

A tétel bizonyítását mellőzzük, lényege egy két férfiból és két nőből álló ellenpélda. A tételt (Alcalde és Barbera, 1994) tovább erősítette:

2.8. Tétel. *(Alcalde és Barbera, 1994) Nincs olyan Pareto-optimális és egyénileg racionális párosító mechanizmus, melyben a valós preferenciák felfedése domináns stratégia.*

Mivel sok olyan alkalmazás létezik, ahol csak az egyik oldal stratégiai, érdekes azokat az eseteket is vizsgálni, ahol csak az egyik oldal stratégiai viselkedése kérdéses. A következő tételt is bizonyítás nélkül közöljük.

[4] Roth és Oliveira Sotomayor (1990) idézi a New York Times 1986. január 30.-i számát.

2.9. Tétel. *(Dubins és Freedman, 1981) Az M-optimális stabil párosítást eredményező mechanizmusban a férfiak számára domináns stratégia a valódi preferenciáik felfedése.*

A tétel nem mond semmit a nők viselkedéséről az M-optimális stabil párosítással kapcsolatban. Mivel az ő érdekeik ebben az esetben épp ellenkezőek, joggal feltételezzük, hogy az M-optimális stabil párosítás alkalmazása és több stabil párosítás esetén lesz olyan nő, aki jól jár azzal, ha valótlanul adja meg preferenciáit (Gale és Sotomayor, 1985b).

A tárgyalást végül egy meglehetősen általános tétellel zárjuk (bizonyítás nélkül), mely kimondja, hogy bár egyes csoportok manipulálhatják preferenciáikat, ez sosem lesz a csoport minden tagja számára domináns stratégia.

2.10. Tétel (A sikeres manipuláció korlátairól). *(Demange et al., 1987) Ha P jelöli a valódi preferenciákat és $\bar{P}$-ben csak a résztvevők valamely C részhalmazának preferenciái térnek el, akkor nincs olyan $\bar{P}$ szerint stabil párosítás, amit a C koalíció minden tagja preferál minden P szerint stabil párosítással szemben.*

Ezek, és még sok más kevésbé izgalmas tétel jelzi, hogy a stratégiai viselkedésnek szerepe van, de nem akkora. Felmerül a kérdés, hogy ha minden résztvevő él a preferenciák stratégiai manipulálásával, akkor mindez hova vezet, kialakul-e egy egyensúly, amiből aztán meghatározhatjuk az egyensúlyi párosítást. Az ilyen típusú egyensúly meghatározásához visszatérünk a probléma normális alakjához és a legjobb válasz fogalmához (2.5.1 szakasz).

2.11. Definíció. *A Q stratégiai preferencia-profil* egyensúlyt *alkot, ha minden Q_i legjobb válasz a többiek adott Q_{-i} stratégiáira.*

Ezt az egyensúlyt a játékelméletben Nash egyensúlynak (Nash, 1950, 1951) is nevezzük. A fogalmat felhasználva Roth (1982) tételét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy nincs olyan stabil párosítási mechanizmus, melyre mindig egyensúlyi a preferenciák felfedése.

Ha megjósolható egy ilyen játék kimenete, akkor az pontosan a Nash-egyensúllyal jósolható meg. Naívság volna feltételezni, hogy bármilyen más jóslathoz tartani fogják magukat a résztvevők, hiszen minden más stratégiai preferencia-profilra létezik olyan résztvevő, aki jobban jár stratégiájának módosításával. Ugyanakkor egyensúlyi profil esetén senki nem jár jól egy egyoldalú módosítással és ugyanennél fogva aligha indulhat ki abból, hogy más is módosítaná stratégiáját. Így az egyensúly önmegerősítő.

Az egyensúly létezése könnyen igazolható: Ha μ egy egyénileg racionális párosítás (tehát még nem is feltétlenül stabil), akkor $\mu(i)$ megnevezése, mint egyetlen elfogadható pár minden egyes i résztvevő számára egy triviális Nash-egyensúlyt alkot. Sajnos létezhet igen sok egyensúly is, így ez a megközelítés sem hoz egyértelmű eredményt az egyensúlyi párosításra vonatkozólag.

2.6. Összegzés

Az, hogy egy mechanizmus a megadott preferencia-profil alapján stabil párosítást készítsen, és hogy a megadott preferenciák megfeleljenek a valóságnak általában kizárják egymást. A negatív eredmény mellé némi vigasz, hogy bizonyos speciális esetekben a kettő mégis megfér egymás mellet. Fontos tanulság tehát, egy-egy tulajdonság drámaian befolyásolhatja egy piac működését és a kialakuló párosításokat.

A továbbiakban elköszönünk a házassági piacoktól és rátérünk a sok-az-egyhez párosítások vizsgálatára.

3. fejezet

Sok-az-egyhez párosítások

A felsőoktatási felvételi modellje

3.1. Bevezetés

A bevezetőben tárgyalt rezidensi felvételi, vagy hasonlóan a magyar felsőoktatási felvételi rendszer szintén párosítási probléma. Itt a párosítandók az iskolák[1] és a jelentkezők. Ahogy a férfiak rangsorolni tudták a feleségjelölteket és viszont, a jelentkezők is rangsorolni tudják az iskolákat/kórházakat, míg az utóbbiak is rendelkeznek valamilyen rangsorral a hallgatókat illetőleg.

Vannak ugyanakkor fontos különbségek is. Míg a házassági modellben –a monogámiát feltételezve– minden férfi és nő pontosan egy személlyel kerül párosításra, addig a felvételik során egy egy iskola több hallgatót is felvehet. A párosítás eredménye egy diák számára a felvételt jelenti valamely intézménybe, vagy a magával való párosítást, ami itt is a magára maradást jelenti. Egy intézmény felvehet a szabad helyekre tetszőleges számú hallgatót, azaz tetszőleges számú hely maradhat üresen. Ezekre a helyekre az iskolát önmagával párosítjuk.

Természetesen a modell alkalmazható más párosítási problémákra is, mint például álláskeresők és cégek közti közvetítésben, de az egyszerűség kedvéért a továbbiakban hallgatókról és

[1]Valójában a hallgatók az egyes iskolák által oktatott szakok, sőt még azon belül is képzési és finanszírozási formák között választanak, de az egyszerűség kedvéért csak intézményekről beszélünk.

iskolákról fogunk beszélni.

3.2. Matematikai modell

A párosítás résztvevői az iskolák $C = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ és a hallgatók $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$. Akár a házassági modellben, feltételezzük, hogy a hallgatók az iskolákat, az iskolák pedig a hallgatókat rangsorolják. Feltételezzük továbbá, hogy minden preferencia teljes és tranzitív. A korábbiakhoz hasonlóan itt is egyszerű felsorolással írjuk le a preferenciákat, továbbá itt is elhagyjuk az elfogadhatatlan párosításokat. Így például $P(C_1) = s_1, s_2$, illetve $P(s_2) = C_3, C_1, C_2$. Konkrét összehasonlításban $C_i >_s C_j$, ha az s hallgató preferálja a C_i iskolát a C_j-vel szemben. Az s_i hallgató elfogadható a C iskola számára ha $s_i \geq_C C$ (ahol megengedtük az egyenlőséget, azaz indifferenciát is).

Első lényegi különbségként feltételezzük, hogy egy C iskola q_C hallgatót vehet fel. q_C-t az iskola kvótájának nevezzük.

A következő definícióhoz szükségünk van egy új fogalomra. Egy adott X halmaz elemeinek *rendezetlen családja* alatt X elemeinek egy gyűjteményét értjük, ahol megengedjük az ismétlődést is.

3.1. Definíció (Párosítás). *A μ párosítás egy olyan függvény, mely a $C \cup S$ halmaz elemeihez a $C \cup S$ halmaz rendezetlen családjait rendeli, mégpedig úgy, hogy*

1. *$|\mu(s)| = 1$, és $\mu(s) = s$, vagy $\mu(s) \in C$, azaz minden hallgatót pontosan egy iskolához, vagy önmagához rendeli*

2. *$|\mu(C)| = q_C$, azaz minden iskolához egy olyan családot rendelünk, melynek kardinalitása pontosan az iskola kvótájával egyezik. Megkötés továbbá, hogy ha a családnak r eleme hallgató ($|\mu(C) \cap S| = r$), akkor a maradék $q_C - r$ helyet önmagával, C-vel tölti fel.*

3. *Akkor, és csak akkor $\mu(s) = C$, ha s a $\mu(C)$ családba tartozik, azaz a párosítás kölcsönös.*

A párosításokat a korábbiakhoz hasonlóan ábrázoljuk, tehát

$$m_1 = \begin{array}{cccccc} & C_1 & & & C_2 & (s_3) \\ s_1 & s_2 & C_1 & C_1 & s_4 & s_3 \end{array}$$

azt jelenti, hogy $q^{C_1} = 4$, ebből 2 helyet töltött fel hallgatókkal, C_2 csak egy hellyel rendelkezett, amit sikeresen fel is töltött, míg s_3 felvételije sikertelen volt.

3.2.1. Preferenciák

A házassági modellben a párosítások közti preferenciák kérdésén hamar átestünk: minden résztvevő a hozzárendelt párja alapján rangsorolta a párosításokat. Tehát ha $\mu_1(x) >_x \mu_2(x)$, akkor (és csak akkor) $\mu_1 >_x \mu_2$. Ez a gondolatmenet tökéletesen illik itt is, a hallgatókra, azonban az iskolákat itt nem hallgatókkal, hanem hallgatók csoportjaival párosítjuk, így mindenek előtt azt kell tisztázni, hogy az iskolák hogy rangsorolják ezeket a hallgatói csoportokat.

A C iskola csoportokra vonatkozó preferenciáit $P^{\#}(C)$-vel jelöljük. Elvben $P^{\#}(C)$ bármi lehet, ugyanakkor vannak olyan tulajdonságok, melyeket joggal feltételezhetünk. Így logikus, hogy ha a hallgató egy adott halmazában valamely hallgatót, egy, az iskola által felállított hallgatói rangsorban előrébb szereplő hallgatóra cserélünk, míg a többit változatlanul hagyjuk, akkor az iskola a kapott halmazt preferálja. Általánosan a feltételt a következőképpen definiáljuk:

3.2. Definíció. *A hallgatók részhalmazain értelmezett $P^{\#}(C)$ reláció reszponzív (az egyéni hallgatókra definiált $P(C)$ preferenciákra), ha*

$$\mu(C) \cup \{s'\} \setminus \{s\} >_C \mu(C) \Leftrightarrow s' >_C s,$$

ahol, értelemszerűen az első preferencia-reláció $P^{\#}(C)$-re, az utóbbi $P(C)$-re vonatkozik.

Bár a reszponzivitás némileg korlátok közé szorítja a $P^{\#}(C)$ reláció lehetséges változatait, nem határozza meg például az iskola rangsorában első és negyedik, illetve második és harmadik helyen levő hallgatók által alkotott halmazok rangsorát. Fordítva viszont egyértelmű a kapcsolat: $P^{\#}(C)$ egyértelműen meghatározza a $P(C)$ preferencia-relációt (hiszen $P^{\#}(C)$-t definiáljuk az egy hallgatóból álló csoportokra is).

3.2.2. Stabilitás

Akár a házassági modellben, itt is feltételezzük, hogy a felvételhez a felek kölcsönös beleegyezése szükséges, így nem számíthatunk olyan párosításokra, ahol $\mu(s) = C$ és vagy a hallgató elfogadhatatlan az iskola, vagy az iskola a hallgató számára. Ellenkező esetben az érintett résztvevő blokkolhatja a párosítást. Az ilyen blokkoktól mentes párosításokat *egyénileg racionálisnak* nevezzük.

Hasonlóan, a C iskola és az s hallgató blokkolhatja az adott μ párosítást, ha $\mu(s) \neq C$ és mindkettő preferálja a másikat (az egyik) jelenlegi párjával szemben, azaz $C >_s \mu(s)$ és $s >_C \sigma$, ahol $\sigma \in \mu(C)$ és lehet hallgató, vagy maga C, azaz egy üres hely.

3.3. Definíció (Stabil párosítás). *Egy párosítás stabil, ha egyénileg racionális és semelyik hallgató-iskola páros nem blokkolja.*

Elvileg ez a fajta stabilitás a történetnek csak része, de hamarosan igazoljuk, hogy a több hallgatóból és esetleg több iskolából álló koalíciók blokkjaira is kiterjesztett stabilitás a fentivel egybeesik.

Azt mondjuk tehát, hogy egy μ párosítás *csoportosan instabil*, avagy egy *koalíció blokkolja*, ha létezik egy A koalíció, és egy μ' párosítás, hogy minden egyes $s \in A$ hallgatóra és minden egyes $C \in A$ iskolára

- $\mu'(s) \in A$, tehát az érintett hallgatók az érintett iskolák valamelyikével lesznek összepárosítva,
- $\mu'(s) >_s \mu(s)$, tehát az új párosítást preferálják,
- ha $\sigma \in \mu'(C)$, akkor $\sigma \in A \cup \mu(C)$, tehát C új hallgatókat csak A-ból meríthet
- $\mu'(C) >_C \mu(C)$, tehát az érintett iskolák is az új párosítást preferálják.

Összegezve: Minden, a változásban érintett hallgató és iskola az új párosítást preferálja.

3.4. Definíció. *Egy párosítás* csoportosan stabil*, ha nem blokkolja semmilyen koalíció.*

3.5. Tétel. *Egy párosítás pontosan akkor stabil, ha csoportosan stabil.*

Mivel egy hallgató-iskola páros is koalíció, ha egy párosítást egy ilyen pár blokkol (azaz ha nem stabil), akkor csoportosan is instabil. Azaz, ha csoportosan stabil, abból következik, hogy stabil.

A másik irányhoz a reszponzivitást használjuk. Ha ugyanis egy párosítást blokkol egy koalíció, akkor létezik olyan hallgató-iskola pár, akik ebben a blokkban mindketten jól járnak (ha nincs hallgató a blokkoló koalícióban, akkor egy még egyszerűbb esettel van dolgunk, amit az olvasóra bízunk), méghozzá az iskola egy rosszabb hallgatót cserél le[2]. Ekkor viszont ez a páros a koalíciótól függetlenül is blokkolná a kiindulási párosítást, tehát az nem stabil.

3.2.3. Kapcsolat a házassági modellel

A tétel jelentősége messze túlmutat a tényen, hogy továbbra is a jól ismert stabilitás-koncepciót használhatjuk, azaz, hogy elegendő a kis koalíciókat figyelemmel kísérnünk. A tételből következik, hogy elegendő a résztvevők egyénekre vonatkozó P preferenciáival foglalkozni! Tehát el is felejthetjük a csoportokra vonatkozó preferenciák körüli problémákat. Mindez azt sugallja, hogy a felvételi és a házassági modell között a kapcsolat sokkal szorosabb, mint gondoltuk, s ez azt a reményt ébresztheti bennünk, hogy az ott kapott eredmények könnyen általánosíthatók lesznek a felvételi modellre.

Hogy ezt megvizsgáljuk, a (C, S, P) felvételi piacot házassági piaccá alakítjuk.

Ehhez elsőként az egyes iskolák által kínált helyeket külön-külön résztvevőként fogjuk vizsgálni, azaz tulajdonképpen a C iskolát q^C darabra bontjuk: $c_1, c_2, ..., c_{q^C}$, melyek átveszik C preferenciáit. Ugyanígy, a hallgatók is egyformán vélekednek a $c_1, ..., c_{q^C}$ helyekről, tehát, az egyszerűség kedvéért a hallgatók által az iskolákról felállított rangsorban C helyére beillesztjük a $c_1, ..., c_{q^C}$ sorozatot. Tehát, ha $C >_s C'$, akkor s a C minden egyes pozícióját preferálja C' minden egyes pozíciójához képest. Az így kialakított piac egy-az-egyben megfelel a házassági piacnak.

[2]A blokkoló koalícióba beleférnek olyan hallgatók is, akikkel külön nem járna jól az iskola, ezért kell itt óvatosnak lenni.

3.6. Tétel. *A felvételi problémában pontosan akkor stabil egy párosítás, ha a megfelelő házassági piaci párosítás is stabil.*

Eme tételen keresztül sok korábbi eredmény, például a stabil párosítások létezésére vonatkozók átvezethetők a felvételi problémára. Sajnos ez igaz a negatív eredményekre is. Mivel a házassági modell a felvételi modell speciális esete (ahol minden iskola legfeljebb 1 hallgatót vehet fel) itt is igaz a 2.7 tétel, azaz nincs olyan stabil párosító mechanizmus, ahol az őszinteség domináns stratégia lenne.

Ugyanakkor több olyan tételt is megfogalmaztunk optimalitás vonatkozásában, ahol az eredmény egy kicsit más lesz, ha figyelembe vesszük azt is, hogy az egyes helyek valójában együtt alkotnak egy résztvevőt, aki mindig egy ilyen, ha úgy tetszik, koalíciót alkotva hozza meg döntéseit.

3.2.4. A NIMP/Gale-Shapley algoritmus és tulajdonságai

A továbbiakban bizonyítás nélkül soroljuk fel a főbb tételeket. Mindenek előtt a NIMP algoritmus sikerének nyitját próbáljuk felfedni:

3.7. Tétel. *(Roth, 1984) A NIMP algoritmus (lásd A.1. Appendix) stabil párosító mechanizmus.*

A fenti tétel megmagyarázza, hogy miért volt oly sikeres a központosított felvételi: A javasolt párosítás stabil, tehát nincs olyan medikus-kórház páros, akik javítani tudnának rajta. Így mindenki elégedett lehetett a kapott párosítással.

3.8. Tétel. *(Roth, 1984) A NIMP algoritmus bármely megadott preferencia-profil esetén a kórházak számára optimális stabil párosítást eredményezi. Azaz a NIMP algoritmus bármely megadott preferencia-profil esetén a H_i kórházat az elérhető legnagyobb számú, és ezen belül az elérhető általa legelőrébb rangsorolt hallgatóval párosítja.*

Ez a tétel egyszerre igazolja, hogy létezik kórházak számára optimális stabil párosítás, illetve, hogy a NIMP algoritmus pontosan ezt állítja elő. Mielőtt ebből túl messzire menő következtetéseket vonnánk le, tekintsük a következő tételt:

3.9. Tétel. *(Roth, 1985) A hallgató-optimális stabil párosítás gyengén Pareto-optimális, viszont a kórház-optimális stabil párosítás nem feltétlenül az.*

A tétel első fele a házassági modellekre kapott eredményekből következik, míg a második részre Roth (1985) mutat egy példát, ahol a Pareto-optimalitás sérül.

Végül pár eredmény a NIMP ellen megfogalmazott kritikákkal kapcsolatban.

Az első ilyen nem pusztán kritika, hanem világosan megfigyelhető tény, hogy ahogy nő a végzős medikusok között az orvos-orvos házaspárok száma, csökken a NIMP-ben való részvétel aránya. Világos, hogy a NIMP a házaspárokat nehezen kezeli, de vajon létezik-e jobb megoldás.

3.10. Tétel. *(Roth, 1984)*[3] *Ha a házaspárokat is figyelembe vesszük, a felvételi modellben nem mindig létezik stabil párosítás.*

A NIMP-pel kapcsolatos másik kritika a vidéki kórházakból érkezett. A tapasztalat azt mutatta, hogy ezek a kórházak nehezebben töltötték fel állásaikat, és a felvettek közt sokan voltak a külföldi egyetemeken végzett medikusok. Felmerült a kérdés, hogy ez vajon hogy befolyásolja a vidék orvosi ellátásának színvonalát, illetve, hogy lehetséges volna-e a NIMP módosításával ezen a tendencián javítani. Ez elsőre jó ötletnek hangzik, hiszen a párosításban résztvevő medikusok jó része követi a mechanizmus ajánlását, tehát, ha a mechanizmust lehetne úgy módosítani, hogy több/jobb orvos kerüljön vidékre, ezzel megoldódna a probléma. Ugyanakkor a lehetőségeknek vannak bizonyos korlátai. A mechanizmusban való magas fokú önkéntes részvétel annak köszönhető, hogy az eredményezett párosítás stabil. Ez tehát nem lehet alku tárgya. Ekkor viszont a következő tételek azt mutatják, hogy a mechanizmus módosításával nem érhető el a kitűzött cél.

Az első tétel a betöltetlen állásokkal foglalkozik.

3.11. Tétel. *(Roth, 1984) Az felvett hallgatók és a betöltött férőhelyek minden stabil párosítás esetén ugyanazok.*

A másik igény a felvett medikusok minőségével kapcsolatos. Ha már nem lehet minden férőhelyet betölteni, legalább kapjanak ezek a kórházak jobb rezidenseket.

[3] Sotomayor is adott egy független bizonyítást egy publikálatlan kéziratban.

3.12. Tétel. *(Roth, 1986) Az a kórház valamely stabil párosítás esetén nem tudja minden üresedését feltölteni, ahhoz minden stabil párosítás pontosan ugyanezeket a medikusokat fogja hozzárendelni.*

Végül a stratégiai kérdésekre térünk rá.

3.13. Tétel. *(Roth, 1985) Nincs olyan stabil párosítás melyben minden kórház számára domináns stratégia a valós preferenciáik felfedése.*

Ez azonban úgy tűnik amiatt van, hogy az iskolák/kórházak a házassági modellben inkább koalícióként viselkednek. A hallgatók leképezése sokkal természetesebb, így nem meglepő, hogy rájuk alkalmazható a 2.9 tétel:

3.14. Tétel. *(Roth, 1986) A hallgató-optimális stabil párosítás esetén a hallgatók számára domináns stratégia preferenciáik felfedése.*

Az utóbbi tételnek komoly szerepe lesz a projekt során a magyarországi felsőoktatási felvételi rendszer értékelésében is. Ez azonban csak addig igaz, amíg az iskolák stratégiai viselkedéssel el nem titkolják valódi preferenciáikat.

3.15. Tétel. *(Roth, 1986) Vegyünk egy tetszőleges stabil mechanizmust. Ekkor bármely, a valós preferenciák szerint egyénileg racionális párosításhoz létezik egy egyensúly deklarált (tehát nem valós) preferencia-profil, ami ezt a párosítást eredményezi.*

3.3. Összegzés

Ebben a fejezetben a NIMP algoritmus elméleti elemzésével foglalkoztunk, ami természetesen érvényes minden olyan felvételi modellre, illetve problémára, ahol az iskolák preferenciái reszponzívak az egyes hallgatókra vonatkozó preferenciáikra. Egyrészt igazoltuk a házassági piacokkal való rokonságot, majd az is kiderült, hogy a hasonlóság nem mindenütt érvényes.

Vannak olyan kérdések azonban, amikre ebben a fejezetben sem válaszoltunk. A reszponzivitás egy olyan feltétel, ami nem minden helyzetben állja meg a helyét. Így, bár felvételi modellnek nevezhető a cégek és álláskeresők piaca, az egyes felvehető alkalmazottak esetlegesen komplementer képességei miatt ezekben a modellekben a reszponzivitás nem állja meg a helyét. Az ilyen piacok részletes tárgyalása meghaladja e dolgozat kereteit, további részletekért lásd Kelso és Crawford (1982). A párosítások vonatkozásában pedig Bíró (2006) ad – magyar nyelven – egy szélesebb körű áttekintést.

4. fejezet

Alkalmazások

4.1. Bevezető

Az eddigiekben, a bevezető, motiváló példától eltekintve, mely aztán végigkísérte az egész dolgozatot eddig elsősorban az elméleti kérdésekkel foglalkoztunk. A továbbiakban rátérünk a párosítások, elsősorban a felvételi modell alkalmazásainak tárgyalására.

4.2. Rezidensképzés az Egyesült Királyságban: Prioritás-alapú párosítás

A 60-as évek közepén az Egyesült Királyságban (Roth és Oliveira Sotomayor, 1990) is hasonló problémák kezdtek jelentkezni, mint amik a NIMP bevezetéséhez vezettek az Egyesült Államokban, bár a folyamat sokkal lassabb volt részben a sokkal kisebb regionális piacoknak köszönhetően. Tanulva az amerikai példából, a megoldást itt is a (regionálisan) központosított párosítási mechanizmusokban látták, amiket aztán többé-kevésbé az amerikai minta alapján, a helyi, regionális sajátságokat figyelembe véve vezettek be. Ezen mechanizmusok nagy része nem eredményezett stabil párosításokat és így nem meglepő, hogy az (önkéntes) részvétel elmaradt a kívánatostól és így – érdeklődés hiányában – ezek a mechanizmusok fokozatosan eltűntek. Az is tanulságos, hogy mindösszesen kettő (Cardiffban és Edinburgh-ban) volt stabil mechanizmus; ezek igen sikeresek voltak és a mai napig használatban vannak.

Mi két instabil mechanizmust vizsgálunk, melyeket Newcastle-ban és Birminghamben vezették be még a 60-as években. Itt a hallgatók és a leendő konzulensek rangsorolták egymást és a két rangot összegezve alakult ki egy sorrend, majd eszerint a sorrend szerint kerültek a hallgatók elhelyezésre. A két mechanizmusban csak annyi különbség volt, hogy az ugyanolyan össz-rangú hallgató-konzulens párok közül Birminghamben a konzulensek, Newcastle-ben a hallgatók preferenciája döntött.

A Newcastle-i tapasztalat szerint a centralizált mechanizmus mellett egyre fontosabb lett a hallgatók és potenciális konzulensük között a közvetlen kapcsolat, a rendszer feladása előtt a résztvevők döntő része csak a már megkötött egyezség formalizálására használta, azaz csak az elsőrangú preferenciák jelzésére, ami természetesen hátrányos helyzetbe hozta azokat, akik a rendszert annak eredeti rendeltetése szerint használták.

Hasonló algoritmust használnak a német egyetemi felvételi rendszerben (Braun et al., 2007).

4.3. Iskolai felvételi mechanizmusok

Abdulkadiroğlu és Sönmez (2003) a kissé elfeledett és erősen az elmélet felé hajló területet a napilapok címlapjára tette azzal, hogy rávilágított: sok egyesült-államokbeli iskolában tisztázatlan a felvételi rendje, a döntések gyakran önkényesek és még ahol a szabályok világosak és mindenki számára elérhetők is, ott sem felelnek meg a tudományban már évtizedek óta ismert alapvető elvárásoknak. Itt ezek közül az eredmények közül tekintünk át párat.

4.3.1. Sorozatos diktatúra

Az élet különböző területein bizonyított már a korábban említett úgynevezett véletlen sorozatos diktatúra. Emlékeztetőül, itt a hallgatókat véletlen sorba rendezik és a soron következő hallgató mintegy diktátorként választhat a megmaradt opciók közül. Hasonlóan a Tengerészeti Akadémián alkalmazott eljáráshoz, itt is domináns stratégia a preferenciák felfedése. Amellett, hogy ez nem egy stabil párosító mechanizmus, a beiskolázási algoritmusoknál egy másik probléma is felmerül, nevezetesen, hogy a különböző iskolák más-más prioritási sorrendbe rendezik a hallgatókat (például minden iskola a helyi hallgatókat veszi előre). Tehát a beiskolázási mechanizmusnak figyelembe és tudomásul kell vennie az iskolák ilyetén preferenciáit. Balinski és Sönmez (1999); Abdulkadiroğlu és Sönmez (2003) rávilágítanak, hogy a Gale-Shapley algoritmus nemcsak, hogy ezen igényeknek felel meg, de még olyan további szempontok figyelembevételére is alkalmas, mint az úgynevezett szabályozott választás, ahol bizonyos korlátokat alkalmaznak nemi, faji, vagy etnikai alapon a szegregáció csökkentésére.

Szingapúrban a tanulmányi eredmények alapján rangsorolják a hallgatókat (Teo et al., 2001) és –lényegében– az így kialakult sorrendben választhatnak iskolát. A problémát bonyolítja, hogy a felvételi lapok beküldése pillanatában még nem ismert a hallgatók tanulmányi eredménye, illetve a hallgatók csak hat iskolát nevezhetnek meg, s ha ezek egyikébe sem nyernek felvételt, akkor a megmaradt helyek valamelyikére, elsősorban fizikai közelség alapján kerülnek elhelyezésre.

4.3.2. A bostoni mechanizmus

Ezt az azóta sokat kritizált mechanizmust (lásd az A.2 függelékben) Bostonban és még vagy féltucat más városban[1] szinte változatlan formában használták. Annak, hogy ez most Bostonhoz köthető elsődleges oka az, hogy szemben más városokkal Boston világos formában, széles körben (az interneten is) elérhetővé tette az alkalmazott beiskolázási mechanizmust.[2]

A mechanizmus Pareto-optimális a *megadott* preferenciák alapján. Legnagyobb problémája az, hogy nem stratégia-biztos. Nagyon kockázatos dolog olyan iskolát első helyen megjelölni, ahova nagy a túljelentkezés, hiszen ha ide nem sikerül bejutni, könnyen lehet, hogy a második, harmadik, stb. helyen megjelölt iskolák is betelnek (Glazerman és Meyer, 1994). Ennek megfelelően a jelentkezők jelentős része nem a valós preferenciáit adja meg (Chen és Sonmez, 2006).

[1]Cambridge, Mass.; Charlotte; Denver; Minnesota; Seattle; St. Petersburg-Tampa (Ergin és Sönmez, 2006), illetve egy sokban hasonló programot használt New York város is (Abdulkadiroğlu et al., 2005a).

[2]Sönmez előadása a Social Choice and Welfare konferencián, Montreal, 2008.

4.1. Tétel. *(Ergin és Sönmez, 2006) A bostoni mechanizmusban az iskolák számára domináns stratégia a hallgatókat valós preferenciáik szerint rangsorolni. Minden más domináns stratégia pedig ezzel azonos párosítást eredményez.*

Tehát az iskoláknak akkor sem érdeke valótlan preferenciák megadása, ha erre a törvényi keretek lehetőséget biztosítanak. Ennek tükrében általánosan igaz a bostoni mechanizmusra az alábbi tétel:

4.2. Tétel. *(Ergin és Sönmez, 2006) Ha P a valódi preferenciákat jelöli, vizsgáljuk meg a stratégiai preferencia-választó játékot. A játék egyensúlyához tartozó párosítások halmaza pontosan egyezik a P preferenciákhoz tartozó stabil párosításokkal.*

Fontos hangsúlyozni, hogy stabil párosításokat csak akkor kaphatunk, ha a jelentkezők megfelelően jelölik meg preferenciáikat.

Mivel a tétel általában stabil párosításokról szól, a 3.9 tétel alapján ennél gyengén jobb a jelentkezők számára a hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmus. Ennek tükrében nem meglepő, hogy Boston 2005-ben a mechanizmus megváltoztatása mellett döntött (Abdulkadiroğlu et al., 2005b, 2006).

4.3.3. A columbusi algoritmus

A columbusi algoritmus (A.3 függelék) sokban hasonlít a központosítás előtti rezidens felvételi rendszerhez, azzal a lényegi eltéréssel, hogy mivel az elfogadás után a jelentkező kikerül a rendszerből, nem kap utólag kedvezőbb ajánlatot, ami esetleg destabilizálhatná a rendszert, illetve nem merül fel a jogos irigység problémája sem.

Sajnos azonban a stratégiai megfontolások itt is komoly szerepet kapnak: Egyáltalán nem világos, hogy mi alapján célszerű iskolát választani, illetve, az iskoláktól kapott ajánlatot elfogadni. Az például világos, hogy a túljelentkezéssel terhelt legjobb iskolákba való jelentkezés ronthatja a jó iskolákba való bejutás esélyeit, hiszen előfordulhat, hogy a jelentkező egyik megjelölt iskolába sem nyer felvételt és így a maradék helyek valamelyikére kerül besorolásra.

4.3.4. A legjobb csere-körök módszere

Az Abdulkadiroğlu és Sönmez (2003) által javasolt algoritmus lényege, hogy az iskolák által legjobbnak tartott hallgatók egymás között elcserélhetik a megszerzett helyüket. Előnye, hogy a hallgatóknak érdeke a valós preferenciák felfedése, tehát az algoritmus orvosolja az előbbi algoritmusoknál felmerülő problémák nagy részét.

4.3. Tétel. *(Abdulkadiroğlu és Sönmez, 2003) A legjobb csere-körök mechanizmus Pareto-optimális és stratégia-biztos.*

Ugyanakkor ez a mechanizmus nem eredményez stabil párosításokat. Ennek ellenére lehetnek olyan helyzetek, amikor más szempontok fontosabbak. Így például Abdulkadiroğlu és Sönmez (2003) rámutat, hogy ha Columbus Cityben olyan fontos a helybéliek prioritása, hogy garantált helyük van az iskolákban, a fenti mechanizmus közelebb áll a törvényhozó szándékához.

Abdulkadiroğlu et al. (2005b, 2006) a bostoni mechanizmus értékelése során a Bostoni Iskolai Bizottság elé két javaslatot tettek: Az egyik a már jól ismert késleltetett elfogadási algoritmus, a másik pedig a legjobb csere-körök módszere. Az előbbi célravezetőbb, ha várható, hogy mindkét oldal, tehát mind a jelentkezők, mind az iskolák stratégiai eszközökhöz nyúlhatnak, míg az utóbbi az előjogokat védi. Végül a Bizottság az előbbi modell mellett tette le a voksot, de világos, hogy más, hasonló helyzetekben a legjobb csere-körök módszere célravezetőbb lehet.

4.4. Összegzés

Az iskolai felvételi rendszereknek se szeri-se száma, ezek jó része azonban részben, vagy teljesen önkényes, informális döntésen alapszik. Ebben a fejezetben néhánnyal pontosan azok közül tudtunk foglalkozni, melyen világos szabályrendszerüknek köszönhetően könnyen modellezhetők matematikailag. Az átláthatóságnak hátránya, hogy a hibák könnyebben észrevehetők, bár a legtöbb esetben a rendszer használói mindenféle matematikai modell nélkül mondtak ítéletet. Ha visszakanyarodunk a tanulmány elején ismertetett NIMP-re, azt láthattuk, hogy a késleltetett elfogadási algoritmus bevezetése után az (önkéntes) részvétel igen magas volt és a résztvevők elfogadták a rendszer ajánlásait. Ezzel szemben az Egyesült Királyságban bevezetett, a NIMP algoritmussal csak felületes hasonlóságot mutató mechanizmusoktól szinte kivétel nélkül elfordultak a használók, a tényleges párosítás a rendszeren kívül történt, a mechanizmus ezt csak szentesítette. Ugyanígy, a beiskolázási algoritmusok is meglehetősen nagy változatosságot mutatnak: itt a legtöbb kritika nem a stabilitással, hanem a stratégiai kérdésekkel kapcsolatos. Mivel a valódi preferenciák felfedése nem domináns stratégia (sőt: ez csak a legritkább esetben előnyös), a jelentkezőknek komoly energiát kell a jelentkezési lapok ügyes kitöltésére fordítania (Ergin és Sönmez, 2006). Ez nem pusztán időbeli teher, de nem kis frusztrációt okoz. Bár sok ilyen program dicsekszik azzal, hogy rendkívül magas arányban kerülnek hallgatók az első helyen megjelölt iskoláikba (Glenn, 1991; Glazerman és Meyer, 1994), ezek az értékelések azt nem vizsgálják, hogy mindez hogy viszonyul a valódi preferenciáikhoz.

Irodalomjegyzék

Abdulkadiroğlu A., Pathak P.A., Roth A.E., 2005a. The New York City high school match. American Economic Review 95 (2), 364–367.

Abdulkadiroğlu A., Pathak P.A., Roth A.E., Sönmez T., 2006. Changing the Boston school choice mechanism. Boston College Working Papers in Economics 639, Boston College Department of Economics.

Abdulkadiroğlu A., Pathak P.A., Roth A.E., Sonmez T., 2005b. The Boston public school match. American Economic Review 95 (2), 368–371.

Abdulkadiroğlu A., Sönmez T., 1998. Random serial dictatorship and the core from random endowments in house allocation problems. Econometrica 66 (3), 689–702.

Abdulkadiroğlu A., Sönmez T., 1999. House allocation with existing tenants. Journal of Economic Theory 88 (2), 233–260.

Abdulkadiroğlu A., Sönmez T., 2003. School choice: A mechanism design approach. American Economic Review 93 (3), 729–747.

Alcalde J., Barbera S., 1994. Top dominance and the possibility of strategy-proof stable solutions to matching problems. Economic Theory 4 (3), 417–35.

Balinski M., Sönmez T., 1999. A tale of two mechanisms: Student placement. Journal of Economic Theory 84 (1), 73–94. doi:10.1006/jeth.1998.2469.

Bíró P., 2006. Stabil párosítási modellek és ezeken alapuló központi párosító programok. Szigma 37 (3–4), 153–175.

Braun S., Dwenger N., Kübler D., 2007. Telling the truth may not pay off: An empirical study of centralised university admissions in germany. IZA Discussion Papers 3261, Institute for the Study of Labor (IZA).

Chen Y., Sonmez T., 2006. School choice: An experimental study. Journal of Economic Theory 127 (1), 202–231. doi:10.1016/j.jet.2004.10.006.

Demange G., Gale D., Sotomayor M., 1987. A further note on the stable matching problem. Discrete Applied Mathematics 16 (3), 217–222. doi:10.1016/0166-218X(87)90059-X.

Dubins L.E., Freedman D.A., 1981. Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm. American Mathematical Monthly 88 (7), 485–494.

Ergin H., Sönmez T., 2006. Games of school choice under the boston mechanism. Journal of Public Economics 90 (1-2), 215–237. doi:10.1016/j.jpubeco.2005.02.002.

Gale D., Shapley L., 1962. College admissions and the stability of marriage. American Mathematical Monthly 69, 9–15.

Gale D., Sotomayor M., 1985a. Ms Machiavelli and the stable matching problem. American Mathematical Monthly 92, 261–168.

Gale D., Sotomayor M., 1985b. Some remarks on the stable matching problem. Discrete Applied Mathematics 1, 223–232.

Glazerman S., Meyer R.H., 1994. Public school choice in Minneapolis. In: T.A. Downes, W.A. Testa (Eds.), Midwest approaches to school reform. Federal Reserve Bank of Chicago, pages 110–126.

Glenn C., 1991. Controlled choice in massachusetts public schools. Public Interest 103, 88–105.

Kelso Alexander S. S., Crawford V.P., 1982. Job matching, coalition formation, and gross substitutes. Econometrica 50, 1483–1504.

Knuth D.E., 1976. Marriages Stables. Les Presses de l'Université de Montreal, Montréal.

Kuhn H.W. (Ed.), 1997. Classics in Game Theory. Frontiers of Economic Research. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Nash J.F., 1950. Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences 36, 48–49. Reprinted in (Kuhn, 1997, pp. 3-4.).

Nash J.F., 1951. Non-cooperative games. Annals of Mathematics 54 (2), 286–295. Reprinted in (Kuhn, 1997, pp. 14-26.).

Roth A.E., 1982. The economics of matching: Stability and incentives. Mathematics of Operations Research 7 (4), 617–628.

Roth A.E., 1984. The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. Journal of Political Economy 92 (6), 991–1016.

Roth A.E., 1985. The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem. Journal of Economic Theory 36 (2), 277–288. doi:10.1016/0022-0531(85)90106-1.

Roth A.E., 1986. On the allocation of residents to rural hospitals: A general property of two-sided matching markets. Econometrica 54 (2), 425–27.

Roth A.E., Oliveira Sotomayor M.A., 1990. Two-sided matching. A study in game-theroretic modeling and analysis. No. 18 in Econometric Society Monographs. Cambridge University Press, Cambridge.

Roth A.E., Peranson E., 1997. The effects of the change in the nrmp matching algorithm. Journal of the American Medical Association 278 (9), 729–732.

Roth A.E., Peranson E., 1999. The redesign of the matching market for american physicians: Some engineering aspects of economic design. American Economic Review 89 (4), 748–780.

Scarf H.E., 1967. The core of an n-person game. Econometrica 35, 50–69.

Teo C.P., Sethuraman J., Tan W.P., 2001. Gale-Shapley stable marriage problem revisited: Strategic issues and applications. Management Science 47 (9), 1252–1267.

Wikipedia, 2008. NFL Draft — Wikipedia, The Free Encyclopedia.

A. Függelék

Algoritmusok

A.1. A NIMP algoritmus

Az alábbiakban Roth (1984) alapján bemutatjuk a NIMP algoritmust.

> Minden kórház rangsorolja a jelentkezőket (X-szel megjelölve a nem elfogadhatókat), és minden hallgató rangsorolja a kórházakat, melyekhez jelentkezett (hasonlóan megjelölve az érdekteleneket). Az így elkészített lapokat kell a központba eljuttatni, ahol első körben a kórházi rangsorokat megtisztítják a kórházat elfogadhatatlanként megjelölő hallgatóktól és ugyanígy a hallgatók rangsorát az őket elfogadhatatlanként megjelölő kórházakétól. A szerkesztett listák tehát elfogadható alternatívákat rangsorolnak.
>
> Ezeket a listákat egy feldolgozó algoritmusba táplálják, mely egyrészt egy párosító fázisból, majd egy próbapárosítás-és-javítás fázisból áll. A párosító fázis első lépése (az 1/1. lépés) az vizsgálja, hogy akadnak-e olyan kórházak és hallgatók, melyek egymás rangsorában első helyen szerepelnek. (Ha egy H_i kórház kvótája q_i, akkor mindez a q_i első helyen rangsorolt hallgatóra vonatkozik.). Ha nincs ilyen találat, akkor az algoritmus rátér a 2/1. lépésre. Itt a hallgatók listáján második helyen szereplő kórházakat viszonyítjuk a kórházak listáján első helyen szereplő nevekkel. Ha nincsenek találatok, az algoritmus továbblép. Általában a k/1. lépésben a párosító

fázis során olyan hallgató-kórház párokat keresnek, hogy a kórház a hallgatót az első helyre sorolja, a kórház pedig k-adik helyen szerepel a hallgatók rangsorában. Ha valamely k-ra van találat, akkor rátér a második fázisra.

Itt a talált párt ideiglenesen összepárosítják, azaz a hallgatót, akit az általa k-adik helyen megjelölt körház első helyen rangsorol, ehhez a kórházhoz rendeljük. Ekkor a hallgatók és á kórházak rangsorait a következő módón módosítjuk: Minden kórház, melyet az s_j hallgató hátrébb rangsorol, mint jelenlegi, ideiglenes párját, törlésre kerül (ha tehát most a k-adik preferenciájához került, akkor csak az első k tagot tartjuk meg. Egyúttal s_j-t töröljük minden, s_j listájáról törölt kórház listájáról (tehát ezen a listán már csak olyan hallgatók maradnak, akik még nem kerültek egy preferált kórházhoz. Vegyük észre, hogy ha egy kórház preferált hallgatóját töröljük a rangsorából, azzal a többi hallgató eggyel előrébb lép, hiszen így ugyanazon kvóta mellett kevesebb hallgatót tartalmaz a rangsor. Miután a rangsorokat frissítettük az algoritmus visszatér az első fázisba, ami a frissített rangsorok mellett keres párokat. Bármilyen új párosítás felülírja az aktuális, ideiglenes párosításokat (Megjegyzendő, hogy az új párosítás csak javíthat a hallgató meglevő hozzárendelésén, hiszen a hátrébb rangsorolt kórházakat töröltük.). Az algoritmus véget ér, ha nem talál új ideiglenes találatokat, ekkor az ideiglenes párokat véglegesíti. A pár nélkül maradt hallgatók, vagy kórházi helyek nem kerülnek párosításra és közvetlenül próbálhatnak más párosítatlanul maradt hallgatókkal, illetve helyekkel egyezkedni.

A.2. A bostoni algoritmus

A Bostonban 1999. és 2005. között használt algoritmus a következő (Abdulkadiroğlu és Sönmez, 2003):

1. A jelentkezők rangsorolják az iskolákat.

2. Az iskolák egy prioritási rendet állítanak fel lakhely (gyalogtávolságra az iskolától) és az iskolával esetlegesen meglévő családi kapcsolat (nevezetesen az iskolába járó testvér)

alapján:

- Elsőrangú prioritás: testvér az iskolában és gyalogtávolságra lakik
- Másodrangú prioritás: testvér az iskolában
- Harmadrangú prioritás: gyalogtávolságra lakik
- Negyedrangú prioritás: egyéb

Az egyes csoportokon belül egy előre meghirdetett véletlen sorrend dönt.

3. Utolsó lépés maga a beiskolázás a fenti preferenciák alapján:

   - Első körben csak az első helyen megjelölt iskolát veszik figyelembe. Minden iskola a hozzá jelentkezők között a fent meghatározott preferenciák alapján, illetve a kapacitás függvényében osztja ki a helyeket.
   - A maradék hallgatókat a második helyen megjelölt iskolába próbáljuk meg elhelyezni
   - És így tovább, egészen, amíg el nem fogynak a hallgatók.

A.3. A columbusi algoritmus

A Columbus Cityben alkalmazott algoritmus a következő (Abdulkadiroğlu és Sönmez, 2003, alapján):

1. Minden jelentkező legfeljebb 3 iskolát jelölhet meg.

2. Bizonyos iskoláknál garantált helye van az iskola körzetében lakóknak. A fennmaradó helyekre a jelentkezők sorrendje véletlenszerű. A többi iskolánál az összes hely véletlen sorrend alapján kerül kiosztásra.

3. A (még) szabad helyeket a fenti preferenciák figyelembevételével ajánlják meg a jelentkezőknek. Az ajánlatra 3 napon belül kell válaszolni. Elfogadás esetén a jelentkező kikerül a rendszerből, az elfogadott ajánlat alapján kerül beiskolázásra. Ahogy egyes ajánlatok elutasításra kerülnek, ezeket a helyeket megajánlják az egyenlőre várólistás jelentkezőknek.

A.4. A legjobb csere-körök módszere

1. Minden hallgató és iskola megnevezi mit/kit rangsorol az első helyre. Mivel a résztvevők száma véges létezik olyan $s_1, C_1, s_2, ..., C_k$ kör, hogy s_i $C_i t$-t preferálja, aki viszont s_{i+1}-t, továbbá C_k s_1-t preferálja. Minden hallgató és minden iskola legfeljebb egy-egy körhöz tartozik. Minden olyan hallgatót, aki egy ilyen körhöz tartozik, felveszi az általa megnevezett iskola. Ezzel a hallgató kikerül a rendszerből, az iskolának pedig eggyel kevesebb szabad helye marad. Ha minden hely elfogyott, akkor az iskola is kikerül a rendszerből, így a továbbiakban a hallgatók már nem nevezhetik meg, mint kedvencüket.

2. Minden további lépésben a maradék hallgatók és a maradék iskolák vesznek részt, ettől eltekintve a lépés lefolyása ugyanaz, tehát a résztvevők megnevezik a preferenciájukat, majd a körökhöz tartozó hallgatókat az általuk megnevezett iskola veszi fel.

3. Az algoritmus akkor ér véget, ha a hallgatók elfogynak. Mivel minden lépésben legalább egy hallgató felvételt nyer, így a szükséges lépések száma nem több, mint a hallgatók száma.