MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI INTÉZET

**AZ MTA-KTI
„A KÖZOKTATÁS TELJESÍTMÉNYÉNEK MÉRÉSE-ÉRTÉKELÉSE, AZ ISKOLÁK ELSZÁMOLTATHATÓSÁGA” PROGRAMJÁNAK**

**FERO
1404. SZÁMÚ PRODUKTUMA**

# A felvételi rendszerek meglévő és kívánt tulajdonságainak összevetése.

Kóczy Á. László[1]

2009. december 31.

[1]Budapesti Műszaki Főiskola, Keleti Károly Gazdasági Kar, 1084 Budapest, Tavaszmező 15-17. Email: koczy.laszlo@kgk.bmf.hu

# Tartalomjegyzék

**Kivonat**

A magyarországi középiskolai és felsőoktatási felvételi rendszereket, illetve azok törvényi hátterét vizsgálva megállapítjuk, hogy a jogszabályok és alkalmazásuk között jelentős eltérések mutatkoznak.

A felsőoktatási felvételi (Felvi) alapjául szolgáló rendelet egy pontszámításos-vonalhúzásos besorolást ír elő, melyet a Felvi hűen követ, ugyanakkor a párosítás céljaként az államilag finanszírozott helyek minél jobb feltöltését adja meg, ami, betű szerint értelmezve, meglehetősen furcsa és semmiképpen sem stabil párosításokhoz vezethet. Sajnos a rendelet nem szól az olyan, elméleti szempontból is nehéz pontokról, mint például a legkisebb induló létszámok, vagy a ponthatár közelében sok azonos pontszámmal rendelkező jelentkező felvétele, vagy elutasítása.

A középiskolai felvételi esetében a jogszabály leírja az algoritmust; sajnos azonban ez az algoritmus egy rendkívül kedvezőtlen, szélsőségesen rossz párosítást eredményez így arra kell gondolnunk, hogy a rendelet szövegezésekor bizonyos kulcsfontosságú részek egyszerűen kikoptak. Jelen formájában a mechanizmus legalább annyira hasonlít a bostoni, mint a Gale-Shapley, vagy más néven késleltetett elfogadási algoritmusra. Nehéz helyzetben vagyunk akkor, ha választanunk kell a kettő közül: bár éveken át a szakirodalom az utóbbi dicséretétől volt hangos, a legújabb eredmények azt mutatják, hogy bizonyos, ilyen helyzetekben valószínűsíthető tulajdonságok együttállása esetén a bostoni algoritmus Pareto-dominálhatja a Gale-Shapleyt.

**Kulcsszavak**: párosítások, késleltetett elfogadási algoritmus, Gale-Shapley, bostoni algoritmus, stabilitás, őszinteség, hatékonyság, jólét

# 1. fejezet

# Bevezetés

A felvételi, legyen szó középiskolai, vagy felsőoktatási felvételiről, az ember szakmai előmenetelének fontos állomása, ha úgy tetszik fordulópontja. Az elmúlt évtizedek demográfiai változásainak, társadalmi átalakulásának köszönhetően ma a magasabb szintű oktatás sokkal többeket érint, ugyanakkor, ennek némileg ellentmondó módon, a jelentkezők számára a lehetőségek soha nem látott gazdagságú tárháza nyílt meg. Ez egyrészt valódi választási lehetőséget kínál a jelentkezőknek, másrészt a jelentkezők elvárásai is megnőttek. Ha a felsőoktatásról beszélünk, akkor nyilvánvaló a rendszerváltás óta végbement kínálati robbanás, de középiskolai szinten is átstrukturálódott a piac, ma a kínálat is sokkal összetettebb, heterogénebb. Ezek a tények mind növelik a felvételi felelősségét.

Egy, a szakirodalomról készült rövid áttekintés (Kóczy, 2008) után megvizsgáltuk a középiskolai felvételit vezérlő, úgynevezett KIFIR algoritmust, illetve a felsőoktatási felvételit bonyolító Felvi besoroló mechanizmusát (Kóczy, 2009a). Végül az idevonatkozó jogszabályi szövegeket elemezve megpróbáltuk rekonstruálni a jogalkotó szándékait (Kóczy, 2009b). Mennyiben felelnek meg az alkalmazott módszerek a társadalmi tervező elképzelésének? Mennyiben felelnek meg a szakirodalom által támasztott, ha úgy tetszik: tudományos elvárásoknak? Jelen dolgozatunkban ezekre a kérdésekre keressük a választ.

A két kérdés közül az utóbbit már részben megválaszoltuk. Mind a KIFIR, mind a Felvi algoritmusok jelentkező-optimális stabil párosítást eredményeznek, ami röviden a lehető legjobb helyzet. Ezen továbbmenve a KIFIR a késleltetett elfogadási algoritmus (Gale és Shapley, 1962) tiszta alkalmazása, amire nem igen akad más példa. Az algoritmusok által elkészített párosítások egyik (fő) jellemzője a stabilitás. Míg a pontos definíciókat a következő fejezetre hagyjuk, azt fontos elmondanunk, hogy a szakma elsősorban a stabilitásnak tulajdonítja, hogy több olyan példa is akad, ahol egy központi, de önkéntes részvételi alapon szerveződő párosítási mechanizmus hosszú idő óta jelentős részvétellel működik. A Magyarországon is jelenlevő stabilitás hozzájárulhat ahhoz, hogy a mechanizmus könnyen elfogadásra került, illetve, hogy nem alakultak ki másodlagos piacok.

A másik érdekes tulajdonság az őszinteség, azaz, mikor a jelentkezőknek érdekében áll a valós preferenciáik kertelés nélkül való felfedése. Sajnos például ez sérül a felsőoktatási felvételi esetében, hiszen a számbajövő iskolák felsorolása esetenként igen költséges lehet.

Jelen dolgozatban a vizsgálatainkat egy új elemmel, a társadalmi jólét figyelésével egészítjük ki. Ez a gondolat egészen új, a tanulmányban tárgyalt eredmények Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2008, 2009) jelenleg még csak kéziratos formában elérhető eredményein alapszanak. Ezek az eredmények korábbi tanulmányaink írásakor még nem voltak elérhetők, így fontosnak éreztük ezen eredmények ismertetését. Az eredmények hangsúlyozzák, hogy a késleltetett elfogadási algoritmus dominanciája bizonyos feltételek mellett igaz, ugyanakkor ezen feltételek például az általuk vizsgált bostoni középiskolák esetében nem állják meg a helyüket. Ha igazak az iskolák és a hallgatók preferenciáinak megfigyelt tulajdonságai, akkor – bizonyos játékokban – még az olyan előnytelen algoritmus, mint az ún. bostoni is kedvezőbb párosítást eredményez.

Vizsálatunk fő célja ugyanakkor az elmélet és gyakorlat, azaz a törvény és alkalmazásának összevetése. Egy jogszabály a felvételi párosítás lebonyolításának módját alapvetően kétféle módon adhatja meg. Vagy leírja az algoritmust, vagy bizonyos normatív tulajdonságokat rögzít, melyeket elvár az algoritmustól. Érdekes módon, nálunk mind a két módszer megtalálható: a középiskolai felvételi algoritmusát törvény rögzíti, míg a felsőoktatási felvételi esetében csak a ponthúzás és a pontszámok meghatározása került rögzítésre, a ponthatárok meghatározását pedig a lebonyolító szervre bízták. Előbbinek vitathatatlan előnye, hogy egyszerű az alkalmazása, hátránya, hogy egy ilyen jogszabályba könnyebben csúszik hiba és egy-egy apró hiba az algoritmus működése szempontjából végzetes lehet. Utóbbi sokkal többet mond az alkotó szándékáról és lehetőséget ad arra, hogy amennyiben a tudomány újabb, jobb algoritmusokat talál, akkor ezek azonnal alkalmazhatók legyenek. Sajnos mindkét esetben történtek bizony kisebb hiányosságok, amik sajnos elveszik az algoritmusok fő érdemeit.

Ennek megfelelően a dolgozat szerkezete a következő. A következő fejezetben bevezetjük a jelöléseket, tisztázzuk az alapvető fogalmakat, illetve ismertetjük a legújabb – és itt releváns – elméleti eredményeket. A következő két fejezet a dolgozat fő része, hiszen ez mutatja be a két algoritmust, a jogszabályi „változatot" illetve kritikai elemzésünket. Végül érveléseinket egy rövid konklúzióval zárjuk. A dolgozatban felületesen érintett algoritmusokat a mellékletben gyűjtöttük össze.

# 2. fejezet

# Fogalmak és jelölések

A felvételi rendszerekkel a párosítások irodalma foglalkozik. A matematika eme részterülete a szinte mindenkit érintő gyakorlati problémát a saját nyelvére lefordítva elemzi. Bár jelen tanulmányban törekedtünk arra, hogy ne terheljük az olvasót feleslegesen matematikai jelölésekkel, bizonyos esetekben a precizitás érdekében a minimális terminológia és absztrakció elkerülhetetlen. Ebben a szakaszban vezetjük be a fontosabb fogalmakat, jelöléseket.

A párosítás résztvevői két átfedés nélküli, azaz diszjunkt halmazra oszthatók: iskolákra ($C$, mint *colleges*):

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$$

illetve hallgatókra ($s$ mint *students*):

$$\mathcal{S} = \{s_1, s_2, ..., s_m\} .$$

A párosítás alapvetően a másik halmaz résztvevőivel történik – ezt majd technikai okokból később egy kicsit módosítjuk. A felvételi lapon az intézmény megnevezése mellett szerepel a szak, a képzési, valamint a finanszírozási forma is, azaz egy jelentkezés például nem az Óbudai Egyetemre, hanem az egyetem Keleti Károly Karának Gazdálkodási és Menedzsment alapképzésének költségtérítéses nappali tagozatára történik. Mi a könnyebb nyelvezet kedvéért, követve az irodalmi hagyományokat diákokról, hallgatókról illetve iskolákról, intézményekről fogunk beszélni, ahol az utóbbi valójában a középiskolai felvételi esetén iskola-tagozat párt, míg a felsőoktatási felvételiben egy intézmény-szak-tagozat-finanszírozási forma négyest takar.

Feltételezzük, hogy a hallgatók az iskolákat, az iskolák pedig a hallgatókat *rangsorolják*. Feltételezzük továbbá, hogy minden preferencia teljes és tranzitív.[1] Ebben az esetben a preferenciák kifejezhetők egy rangsorral (ahol esetleg megengedünk gyenge rendezést is), így egyszerű felsorolással írjuk le a preferenciákat. Ebben a felsorolásban rögtön elhagyhatunk minden elfogadhatatlan partnert, ezzel is egyszerűsítve a jelölést. Így például $P(C_1) = s_1, s_2$, illetve $P(s_2) = C_3, C_1, C_2$. Konkrét összehasonlításban $C_i >_s C_j$, ha az $s$ diák preferálja a $C_i$ iskolát a $C_j$-vel szemben. Az $s_i$ hallgató elfogadható a $C$ iskola számára ha $s_i \geq_C C$ (ahol megengedtük az egyenlőséget, vagyis az indifferenciát is).

Egy sok-az-egyhez párosításban egy iskola több hallgatót is felvehet, ugyanakkor feltételezzük, hogy a $C$ iskola legfeljebb $q_C$ hallgatót vehet fel. $q_C$-t az iskola (felvételi) kvótájának nevezzük.

A következő definícióhoz szükségünk van még egy fogalomra. Egy adott $X$ halmaz elemeinek *rendezetlen családja* alatt $X$ elemeinek olyan gyűjteményét értjük, ahol megengedjük az ismétlődést is.

**2.1. Definíció (Párosítás).** *A $\mu$ párosítás egy olyan függvény, mely a $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ halmaz elemeihez a $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ halmaz rendezetlen családjait rendeli, mégpedig úgy, hogy*

1. *$|\mu(s)| = 1$, és $\mu(s) = s$, vagy $\mu(s) \in \mathcal{C}$, azaz minden hallgatót pontosan egy iskolához, vagy önmagához rendeli*

2. *$|\mu(C)| = q_C$, azaz minden iskolához egy olyan családot rendelünk, melynek kardinalitása pontosan az iskola kvótájával egyezik. Megkötés továbbá, hogy ha a családnak $r$ eleme hallgató ($|\mu(C) \cap \mathcal{S}| = r$), akkor a maradék $q_C - r$ helyet önmagával, $C$-vel tölti fel.*

3. *Akkor, és csak akkor $\mu(s) = C$, ha $s$ a $\mu(C)$ családba tartozik, azaz a párosítás kölcsönös.*

[1] Azaz egyrészt feltételezzük, hogy bármely két (a későbbiekben: elfogadható) egyed (iskola, vagy diák) összehasonlítható és összehasonlításra is került, továbbá, hogy ha például egy hallgató az A és B iskolák közül A-t, a B és C közül B-t választja, akkor az A és C közül is A-t.

A párosításokat grafikusan is ábrázolhatjuk:

$$m_1 = \begin{array}{cccccc} \multicolumn{4}{c}{C_1} & C_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & C_1 & C_1 & s_4 & s_3 \end{array}$$

A fenti párosítás azt jelenti, hogy $q^{C_1} = 4$, ebből 2 helyet töltött fel hallgatókkal, $C_2$ csak egy hellyel rendelkezett, de ezt sikeresen fel is töltötte, míg $s_3$ felvételije sikertelen volt.

## 2.1. Preferenciák

Az egy-az-egyhez párosítási modellben a párosítások közti preferenciák kérdésén hamar áteshetünk: minden résztvevő a hozzárendelt párja alapján rangsorolja a párosításokat, tehát ha $\mu_1(x) >_x \mu_2(x)$, akkor (és csak akkor) $\mu_1 >_x \mu_2$ (ahol $x \in \mathcal{S} \cup \mathcal{C}$). Ez a gondolatmenet tökéletesen illik itt is a diákokra, azonban az iskolákat itt nem diákokkal, hanem diákok csoportjaival párosítjuk, így mindenek előtt azt kell tisztázni, hogy az iskolák hogy rangsorolják ezeket a hallgatói csoportokat.

A $C$ iskola csoportokra vonatkozó preferenciáit $P^{\#}(C)$-vel jelöljük. Elvben $P^{\#}(C)$ bármi lehet, ugyanakkor vannak olyan tulajdonságok, melyeket joggal feltételezhetünk. Így logikus, hogy ha a hallgatók egy adott halmazában valamely hallgatót, egy, az iskola által felállított hallgatói rangsorban előrébb szereplő hallgatóra cserélünk, míg a többit változatlanul hagyjuk, akkor az iskola a kapott halmazt preferálja. Általánosan a feltételt a következőképpen definiáljuk:

**2.2. Definíció.** *A hallgatók részhalmazain értelmezett $P^{\#}(C)$ reláció fogékony (az egyéni hallgatókra definiált $P(C)$ preferenciákra), ha*

$$\mu(C) \cup \{s'\} \setminus \{s\} >_C \mu(C) \Leftrightarrow s' >_C s,$$

*ahol, értelemszerűen az első preferencia-reláció $P^{\#}(C)$-re, az utóbbi $P(C)$-re vonatkozik.*

Bár a fogékonyság némileg korlátok közé szorítja a $P^{\#}(C)$ reláció lehetséges változatait, nem határozza meg például az iskola rangsorában első és negyedik, illetve második és harmadik helyen levő hallgatók által alkotott halmazok rangsorát. Fordítva viszont egyértelmű a kapcsolat: $P^{\#}(C)$ egyértelműen meghatározza a $P(C)$ preferencia-relációt (hiszen $P^{\#}(C)$-t definiáljuk az egy hallgatóból álló csoportokra is).

## 2.2. Stabilitás

Akár a házassági modellben, itt is feltételezzük, hogy a felvételhez a felek kölcsönös beleegyezése szükséges, így nem számíthatunk olyan párosításokra, ahol $\mu(s) = C$ és vagy az $s$ hallgató elfogadhatatlan a $C$ iskola, vagy a $C$ iskola az $s$ hallgató számára. Ellenkező esetben az elégedetlen résztvevő blokkolhatja a párosítást. Az ilyen blokkoktól mentes párosításokat *egyénileg racionálisnak* nevezzük.

Hasonlóan, a $C$ iskola és az $s$ hallgató együttesen blokkolhatja az adott $\mu$ párosítást, ha $\mu(s) \neq C$ és mindkettő preferálja a másikat (az egyik) jelenlegi párjával szemben, azaz $C >_s \mu(s)$ és létezik olyan $\sigma \in \mu(C)$, melyre $s >_C \sigma$; itt $\sigma$ lehet hallgató, vagy maga $C$, azaz egy üres hely.

**2.3. Definíció (Stabil párosítás).** *Egy párosítás stabil, ha egyénileg racionális, és semelyik hallgató-iskola páros nem blokkolja.*

Elvileg ez a fajta stabilitás a történetnek csak része, de hamarosan igazoljuk, hogy a több hallgatóból és esetleg több iskolából álló koalíciók blokkjaira kiterjesztett stabilitás szintén egybeesik a fent leírtakkal.

Azt mondjuk tehát, hogy egy $\mu$ párosítás *csoportosan instabil*, avagy egy *koalíció blokkolja*, ha létezik egy $A$ koalíció, és egy $\mu'$ párosítás, hogy minden egyes $s \in A$ hallgatóra és minden egyes $C \in A$ iskolára

- $\mu'(s) \in A$, tehát az érintett hallgatók az érintett iskolák valamelyikével lesznek összepárosítva,
- $\mu'(s) >_s \mu(s)$, tehát az új párosítást preferálják,
- ha $\sigma \in \mu'(C)$, akkor $\sigma \in A \cup \mu(C)$, tehát $C$ új hallgatókat csak $A$-ból meríthet
- $\mu'(C) >_C \mu(C)$, tehát az érintett iskolák is az új párosítást preferálják.

Összegezve: Minden, a változásban érintett hallgató és iskola az új párosítást preferálja.

**2.4. Definíció.** *Egy párosítás* csoportosan stabil*, ha nem blokkolja semmilyen koalíció.*

**2.5. Tétel.** *Egy párosítás pontosan akkor stabil, ha csoportosan stabil.*

## 2.3. Őszinteség és taktikázás

Egy párosítási mechanizmus a megadott preferenciák alapján készíti el a párosítást. Ugyanakkor a megadott és a valós preferenciák nem feltétlen egyeznek. Példaként felhozhatjuk a híres-hírhedt bostoni algoritmust (az algoritmust a mellékletben közöljük), ahol a jobb iskolákban gyakorlatilag csak az elsőhelyes jelentkezéseknek van esélye, vagy a például Németországban használt prioritás-alapú párosítási mechanizmust (Braun, Dwenger, és Kübler, 2007). Bár Bostonban a hallgatók rangsora nem tanulmányi eredmények függvénye, hanem bizonyos körülményeké (ilyen például az iskola közelsége, illetve hogy a tanulónak jár-e testvére az iskolába), ha például egy tanulóra kedvenc iskolájában egyik feltétel sem teljesül, aligha célszerű az iskolát első helyen (vagy bárhol) megjelölni, hiszen jelentkezése nagy valószínűséggel sikertelen lesz, és ezzel jó eséllyel sehova nem nyer felvételt (és így majd a betöltetlen helyek közül választhat). Egy ilyen helyzetben a megadott rangsorok alapvetően eltérhetnek a jeletkezők valós preferenciáitól. Hasonló taktikázásra kényszerül az a magyar jelentkező is, aki szeretné a felsőoktatási felvételit viszonylag olcsón megúszni, hiszen az alapdíjért legfeljebb 3 szakot nevezhet meg, míg valószínűsíthető, hogy a jelentkező számára ennél több szak is elfogadható lenne, ha ennél több helyre szeretne jelentkezni, annak külön díja van. A jelentkező így rákényszerül arra, hogy a valós preferenciák helyett első helyen is már egy olyan helyet jelöljön meg, ahova jó eséllyel pályázik.

Vizsgálatunkat kiterjesztve a hallgatók taktikai megfontolásaira is, egy kétlépcsős játékot kell elképzelnünk: első lépésként a hallgatók, illetve az iskolák választanak egy preferenciasorrendet, majd az algoritmus ezen deklarált preferenciasorok alapján határozza meg a párosítást. A párosítási probléma megoldásakor visszafelé érvelünk: ha adott a párosító algoritmus, bármely preferencia-profilra meghatározza a párosítást, a párosításokra vonatkozó preferenciák alapján meghatározhatjuk, hogy egy hallgató a többiek adott preferencia-profiljára milyen legjobb-választ adhat. Az egészet egy nonkooperatív játékként értelmezve, a játék Nash-egyensúlyait keressük.

Ha az algoritmus nem igényel taktikázást, akkor a tanulók őszintén felfedhetik preferenciáikat, míg ellenkező esetben egy egész iparág épülhet arra (Ergin és Sönmez, 2006), hogy a hallgatókat a választásban segítse. Ha taktikázni kell, az nem csak az őszintétlenség miatt fáj, hanem azon az alapon is kritizálható, hogy a jelentkezők a tanulmányi érdemeiken felül egy olyan próbát kell, hogy kiálljanak, olyan képességeket kell felmutatniuk, amiknek a választott szakukhoz adott esetben semmi köze.

## 2.4. Algoritmusok

A tanulmány későbbi részében rendszeresen hivatkozunk két fontos és a gyakorlatban is előforduló algoritmusra. Ezeket az algoritmusokat már részletesen bemutattuk (Kóczy, 2008), de az elmúlt mindössze másfél-két évben sokat változott a velük kapcsolatos álláspont. Míg korábban a késleltetett elfogadási algoritmust szinte hibátlannak fogadta el a tudományos közvélemény, szinte meglepő volt, hogy a párosítások irodalma által támasztott két fő követelmény ily letisztult formában jelenik meg ebben az algoritmusban, a bostoni algoritmus a hozzá nem értés, a nyilvánvalóan laikusok által fabrikált durva és könyörtelen szabály volt. A gyakorlati alkalmazások ezeket az elméleti/szakmai érveket megerősíteni látszottak, hiszen az egyik legnagyobb és mellesleg nem rosszul működő központosított párosítás, az Egyesült Államok rezidensképzésére való felvételit lebonyolító NRMP algoritmus (L. az A.1 mellékletben) ezzel ekvivalens. Olyan megközelítésről beszélhetünk tehát, ami elméletben szinte tökéletes, és a gyakorlatban is jól bevált. Ezzel szemben a bostoni algoritmus kapcsán inkább a problémák jutottak el a szakirodalomba különös tekintettel az érvényesüléshez szükséges taktikázás vagy manipuláció terhéről (Glazerman és Meyer, 1994; Ergin és Sönmez, 2006; Chen és Sönmez, 2006).

Az elmúlt időszakban megtörni látszik a késleltetett elfogadási algoritmus sikersorozata, megállt a terjeszkedés sőt, Seattle-ben, visszatértek egy bostoni típusú algoritmushoz. A lanyhuló alkalmazásbeli sikerek mellett bizonyos elméleti eredmények is megjelentek, melyek rámutatnak, hogy azok a feltételek, amelyeket a késleltetett elfogadási algoritmus felsőbbrendűségét igazoló tételekben szinte kimondatlanul használunk a gyakorlati alkalmazásokban ritkán, de legalábbis nem mindig teljesülnek.

Mivel a magyarországi felvételik esetében mindkét algoritmusnak van relevanciája, az alábbiakban leírjuk az algoritmusokat, röviden összefoglaljuk a már ismert és bemutatott tulajdonságaikat, majd ismertetjük a legújabb kutatási eredményeket.

### 2.4.1. A késleltetett elfogadási algoritmus

Gale és Shapley (1962) az egy-az-egyhez párosítások esetére a késleltetett elfogadási algoritmus segítségével igazolták stabil párosítások létezését. Az algoritmus és az eredmény is kiterjeszthető a sok-az-egyhez párosításokra. Mivel ez relevánsabb a tárgyalt párosításokra, (Roth, 2008, alapján) ezt az algoritmust közöljük:

**0. lépés** Az esetlegesen előforduló közömbös preferenciákat önkényesen feloldjuk. (Például, ha az $s$ közömbös a $C_i$ és $C_j$ iskolák között, akkor legyen $C_i >_s C_j$, vagy $C_j >_s C_i$, mindkét esetben stabil párosítást fogunk kapni.)

**1/a. lépés** Minden tanuló megjelöli az általa preferált iskolát.

**1/b. lépés** Minden iskola elutasítja a számára elfogadhatatlan ajánlatokat. Ha egy iskolát a kvótájánál nagyobb számú elfogadható tanuló jelölte meg, a preferenciasorrendje szerint rangsorolva a jelentkezőket a kvótán felülieket elutasítja.

$k$**/a. lépés** Ha egy tanulót a $k-1$-edik lépésben elutasítottak, megjelöli a legszimpatikusabb olyan iskolát, amelynél még nem próbálkozott (és aki így eddig nem is utasította el őt).

$k$**/b. lépés** Az iskolák a legszimpatikusabb (elfogadható) jelentkezők kivételével a többit elutasítják.

**STOP** Ha egy körben egyik jelentkező sem jelöl meg új iskolát, az aktuálisan el nem utasított tanulók felvételt nyertek. Azok az iskolák, amelyek nem kaptak elegendő (elfogadható) jelentkezést, nem töltik fel a teljes létszámukat, illetve azok a tanulók, akik „kifogytak” az elfogadható iskolákból, felvétel nélkül maradnak.

Mint fentebb már kifejtettük, egy olyan párosítási mechanizmus esetén, ami a hallgató-optimális stabil párosítást eredményezi, a hallgatók számára domináns stratégia az őszinteség, azaz felfedni valós preferenciáikat. A (hallgató-optimális) késleltetett elfogadási algoritmus pontosan ezt a párosítást eredményezi, tehát ezesetben pontosan egy olyan algoritmusról van szó, amely egyszerre teljesíti a stabilitás és az őszinteség feltételeit. Nem meglepő, hogy csak az Egyesült Államokban több, tudományos szempontból nehezen indokolható felvételi rendszert alkalmazó város/régió áttért a késleltetett elfogadási algoritmus alkalmazására. Közöttük például élen járt az alább tárgyalt, közismert, de sokak által elítélt algoritmusnak nevet adó Boston, ahol Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, és Sönmez (2005); Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, és Sönmez (2006) javaslatára váltottak erre a mechanizmusra.

Ezt a fajta fejlődést némiképp beárnyékolja, hogy például Seattle-ben a közelmúltban tértek vissza egy bostoni típusú algoritmushoz. Ezeket a történéseket egy korábbi tanulmányunkban részletesen bemutattuk (Kóczy, 2009b).

### 2.4.2. A bostoni algoritmus

A Bostonban 1999. és 2005. között használt algoritmus a következő (Alcalde, 1996; Abdulkadiroğlu és Sönmez, 2003; Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, és Sönmez, 2005):

1. A jelentkezők rangsorolják az iskolákat.
2. Az iskolák egy prioritási rendet állítanak fel lakhely (gyalogtávolságra az iskolától) és az iskolával esetlegesen meglévő családi kapcsolat (nevezetesen az iskolába járó testvér) alapján:
   - Elsőrangú prioritás: testvér az iskolában és gyalogtávolságra lakik
   - Másodrangú prioritás: testvér az iskolában
   - Harmadrangú prioritás: gyalogtávolságra lakik
   - Negyedrangú prioritás: egyéb

   Az egyes csoportokon belül egy előre meghirdetett véletlen sorrend dönt.
3. Utolsó lépés maga a beiskolázás a fenti preferenciák alapján:

- Első körben csak az első helyen megjelölt iskolát veszik figyelembe. Minden iskola a hozzá jelentkezők között a fent meghatározott preferenciák alapján, illetve a kapacitás függvényében osztja ki a helyeket.
- A maradék hallgatókat a második helyen megjelölt iskolába próbálják meg elhelyezni
- És így tovább, egészen, amíg el nem fogynak a hallgatók.

Az algoritmus fontos jellemzője, hogy igazán jó és népszerű iskolát első helyen megjelölni igen veszélyes, hiszen a sok jelentkező közül kevés kerül felvételre, és mire a második helyen megjelölt jelentkezésre kerülne a sor, a második helyen megjelölt intézményben is elfogyhatnak a helyek (Glazerman és Meyer, 1994). Így a valóban általa legjobbnak tartott megjelölő, ha úgy tetszik naív jelentkező valamely maradék helyre kerül besorolásra, tulajdonképpen preferenciáitól függetlenül. Ennek ellenére megfigyelhető, hogy Bostonban a jelentkezők nagy része az első helyen megjelölt iskolába került felvételre (Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, és Sönmez, 2006). Igazából ez az eredmény teljesen természetes, hiszen a bostoni algoritmus pontosan ezt teszi: minél nagyobb arányban próbálja a jelentkezőket az első helyen megjelölt iskolába juttatni. Az is világos, hogy az előbb említett problémát felismerve, minden hallgató azt az iskolát fogja első helyen megjelölni, ahol igen jó esélye van a felvételre (például, ha a bostoni szabályok szerint preferenciát élvez). Egyensúlyi helyzetben minden jelentkező a késleltetett elfogadási algoritmus által meghatározott iskoláját adja meg, és valóban az első helyen megjelölt intézménybe kerül felvételre (Ergin és Sönmez, 2006; Chen és Sönmez, 2006). Így tehát egyrészt megállapíthatjuk, hogy a bostoni algoritmus is képes ugyanazon párosítás előállítására (a valós preferenciák szerint), ugyanakkor mindez olyanfokú tájékozottságot és taktikázást igényel, amire a legtöbb jelentkező vagy szülő képtelen. A túlzott taktikázás furcsa helyzetekhez is vezethet. Ismert az úgynevezett egyszámjáték, ahol az a nyertes, aki legkisebb olyan egész számra szavaz, amit egyedül ő nevez meg. Viszonylag sok, kis létszámú (pl. 1 fős) iskola és a bostoni algoritmus alkalmazása esetében (ahol az ugyanazon preferencia-csoportba tartozó jelentkezők között rendszerint sorsolással döntenek) könnyel előfordulhat, hogy az a tanuló aki nem egyedül jelentkezik egy ilyen iskolába valamely, a preferenciái legvégén található iskolába nyer csak felvételt. Túlzott taktikázás esetén az a furcsa helyzet is kialakulhat, hogy a jobb iskolákba kevés jelentkezés érkezik. Természetesen ezt a következő évben egy erős túljelentkezés fogja követni. A bostoni algoritmus esetén az iskolákba való jelentkezések száma igen nehezen jósolható meg.

### 2.4.3. Elemzés

A fentiek alapján nem ígérkezik izgalmasnak az a mérkőzés, ahol a két algoritmus tulajdonságait mérjük össze. A késleltetett elfogadási algoritmus vonzó tulajdonságait már az imént ismertettük, így ezeket most nem ismételjük meg. Az algoritmus vitatható pontjai ugyanakkor kevesebb figyelmet kapnak.

Az őszinteség mellett az algoritmus a hallgatók számára legkedvezőbb stabil párosítást adja, *amennyiben a hallgatók és az iskolák is szigorúan rendezett preferenciákkal rendelkeznek*. Az algoritmus csak jól rendezett rangsorok esetén jól definiált, ugyanakkor az iskolák a legritkább esetben tudnak felállítani egy jól rendezett rangsort a jelentkezők között. Ebben az esetben alkalmazzuk az algoritmus nulladik lépését, ahol az esetleges indifferenciákat – tetszőleges módon – feloldjuk. Az indifferenciák feloldásának a módja bizonyos értelemben lényegtelen, hiszen bármilyen feloldást is választunk, az eredmény egy stabil, sőt hallgató-optimális párosítás lesz a megadott preferenciák alapján. A preferenciákat viszont az indifferenciák feloldásakor módosítottuk és más-más feloldás más-más hallgatóknak illetve iskoláknak kedvez.

Az indifferenciák feloldására különböző helyeken különböző módszereket alkalmaznak. A leggyakoribb az indifferens (jellemzően) jelentkezők véletlen sorrendbe állítása. Erre két módszert is alkalmaznak: a DA-STB (deferred acceptance algorithm with single tie-breaking, azaz késleltetett elfogadási algoritmus egyszeri indifferencia-feloldással) esetében minden hallgató kap egy véletlen sorszámot, és a kisebb sorszámmal rendelkezők minden esetben előnyt élveznek a kevésbé szerencsés diáktársakkal szemben. Mint azt már ki lehet találni, a DA-MTB (deferred acceptance algorithm with multiple tie-breaking, azaz késleltetett elfogadási algoritmus többszöri indifferencia-feloldással) esetében a sorszámosztás iskolánként történik, azaz ha egy diák rossz számot kapott az egyik iskolában, a másikban szerencsésebb lehet.[2]

[2]Nincs ugyanakkor semmilyen feltétel, ami ezt garantálná, továbbra is előfordulhat, bár jóval kisebb valószínűséggel, hogy egy jelentkező minden indifferencia-feloldásnál utolsó helyre kerül.

A magyar felvételi rendszerekben, mint látni fogjuk, véletlennek helye – legalábbis hivatalosan – nincs. Az egyformán rangsorolt jelentkezők vagy mind felvételt nyernek, vagy egyikük sem. Mindez vagy a felvételi keretszámok esetleges kismértékű bővítésével érhető el (ami némileg vitathatóvá teszi az ilyen számok értelmét), vagy némi hatékonyságvesztés elkönyvelése mellett egyikük sem nyer felvételt. Ezzel a problémával a megfelelő fejezetekben külön is foglalkozunk. Ha el is fogadjuk ezt a megoldást, kérdés, hogy van-e értelme annak, hogy több száz kategóriába soroljuk jelentkezőket. Valóban jobbak-e a 326 pontosok a 325 pontosoknál, s ha nem feltétlenül, akkor előfordulhat-e, hogy egy furcsának hangzó, de igazságos véletlen algoritmus helyett egy szisztematikus, azaz szükségszerűen igazságtalan rendszerben preferálunk egyes jelentkezőket? Erre a kérdésre később röviden visszatérünk.

Mindenesetre érdekes, hogy a szülők közül többen milyen ellenállással fogadták Bostonban a késleltetett elfogadási algoritmusra való áttérést. Korábban az általa első helyen megjelölt iskolában kivételes elbírálásban részesült és ezzel tulajdonképpen valóban a jelentkező választhatta az iskolát, az új rendszerben viszont az ugyanazon kategóriába tartozók között lényegében a véletlen rangsorolás dönt.[3] Egy szülő megfogalmazása szerint ez azt jelenti, hogy a választásuk helyett egy véletlen szám dönti el, hova kerül felvételre a gyermekük.[4] Egy másik szülő szerint pedig ez a változás elveszi a jelentkezőktől a prioritások megfogalmazásának lehetőségét is, illetve, hogy az algoritmus tervezői ezt taktikázásnak (*strategizing*) nevezik, mintha ez valami csúnya szó lenne. [5]

A szülők ezekben a felszólalásokban azt kifogásolták, hogy nincs lehetőségük a párosítás közvetlen befolyásolására. Amennyiben megadják a jelentkezések preferenciasorrendjét, majd valaki dönt helyettük. Vajon egy stabil párosítás esetén van-e ennek bármi jelentősége?

Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2008) szerint a stabilitás a jelentkezők ex-post, azaz a párosítás utáni helyzetét vizsgálja, holott – és ezt az alábbi, rendkívül egyszerű példával szem-

[3]Bostonban két jellemző alapján legfeljebb 4 csoportba kerülhetnek a jelentkezők, jó hírű iskolák esetében a jelentkezők jelentős része ezek közül a negyedikbe.

[4]A Bostoni Köziskolák nyilvános meghallgatásának jegyzőkönyve, 2005. augusztus 6. (Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda, 2009).

[5]Az Iskolai Bizottság nyilvános meghallgatásának jegyzőkönyve, 2004. november 5. (Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda, 2009).

| $U(s, C)$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|
| $s_1$ | 4 | 4 | 3 |
| $s_2$ | 1 | 1 | 2 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 0 |

2.1. táblázat. A jelentkezők Neumann-Morgenstern hasznosságai a különböző iskolákban

léltetik – az eredeti bostoni algoritmus ex-ante, tehát a párosítás előtt kedvezőbb is lehet a késleltetett elfogadási algoritmusnál.

**1. Példa.** *Három tanuló, $s_1, s_2, s_3$ szeretne felvételt nyerni a $C_1, C_2, C_3$ iskola valamelyikébe. Minden egyes iskola pontosan 1 hallgatót tud felvenni, ekkora a kapacitása. A három hallgató mindhárom iskolában pontosan ugyanabba a prioritási osztályba tartozik, tehát köztük csak a véletlen rangsorolás dönt. A tanulók preferenciáit a 2.1 táblázatban látható Neumann-Morgenstern típusú hasznossági értékekkel írhatjuk le.*

Minden lehetséges párosítás stabil, hiszen egyrészt az iskolák indifferensek a jelentkezők között, másrészt a jelentkezők ordinális, azaz sorrendi preferenciái egyeznek. Ez egyben azt is garantálja, hogy minden párosítás ex-post Pareto optimális. Így utólag nincs semmi alapja a párosítások közötti összehasonlításoknak, illetve nem nevezhetjük egyik, vagy másik párosítást jobbnak. Ugyanakkor az, hogy hogy oldjuk fel az indifferenciákat, nagyban befolyásolja a diákok előzetes, várható hasznosságát.

A késleltetett elfogadási algoritmus esetén, feltételezve, hogy az indifferenciákat véletlen rangsorolással oldjuk fel, a jelentkezők egyforma valószínűséggel kerülnek az egyes iskolákba, így a várható hasznosságuk $\frac{5}{3}$. Ha ehelyett $s_3$ a második, $s_1$ és $s_2$ pedig fele-fele eséllyel a $C_1$, vagy $C_2$ iskolákkal kerülnek párosításra, akkor ugyanez a várható érték egységesen 2, azaz magasabb mindhárom jelentkező számára! Ha megnézzük, a különbség abban rejlik, hogy az utóbbi párosítás során az alacsonyabb preferencia-intenzitású $s_3$ szóba sem kerül a $C_1$ iskolában, viszont a $C_2$-ben a magasabb preferencia-intenzitása miatt előnyt élvez a többiekkel szemben. Más szóval $s_3$ lemond a $C_1$-ben – kis eséllyel – megszerezhető helyéről cserébe a $C_2$-ben megszerzendő biztos helyért. Könnyen teheti, hiszen számára a $C_1$, vagy $C_2$ majdnem mindegy, míg a többiek négyszer inkább szeretnének a $C_1$-be bekerülni, számukra annak kisebb a jelentősége, hogy a $C_2$, vagy $C_3$ iskolában kapnak helyet.

Miért érdekes számunkra ez a párosítás? A fent megadott hasznosságok esetén ez az egyetlen egyensúlyi párosítás amennyiben a párosítás alapja a bostoni mechanizmus. Itt nagyon fontos a bostoni mechanizmusnak az a tulajdonsága, hogy egy tanuló meg tudja növelni egy iskolába való bejutás valószínűségét pusztán azzal, hogy azt az iskolát jelöli meg első helyen. Így már érthető a szülők fent leírt aggodalma.

Mióta Bostonban áttértek a késleltetett elfogadási algoritmusra, a jelentkezők valós preferenciáikat adják meg. A jelentkezők preferenciáinak erős korreláltságát állapítja meg Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2008): a 26 érintett középiskola közül mindössze 8-ban tapasztaltak túljelentkezést, míg korrelálatlanság esetén (amit a szerzők véletlen-generált jelentkezésekkel szimuláltak) a számnak 20 fölött kellene lennie. Ez a megfigyelés (aminek magyarországi érvényességét egy későbbi dolgozatban kívánjuk megvizsgálni) azt jelenti, hogy amennyiben az iskolák viszonylag kevés preferencia osztállyal rendelkeznek a Pareto-optimalitás és a hallgató-optimális stabilitás egyike sem igazán informatív. Abban a szélsőséges esetben, ha az iskolák minden jelentkezőt egyformán kezelnek,[6] és az iskolák között egy jól definiált rangsor állítható fel, *minden egyes* párosítás Pareto-optimális és hallgató-optimális stabil párosítás is egyben. Ezekkel a tulajdonságokkal tehát, legalábbis ilyen helyzetekben, nem tudunk egy legjobb párosítást kiválasztani, holott a párosítások se nem egyformák, se nem egyformán jók. A társadalmi jólét szempontjából például célszerű volna azokat a jelentkezőket előbbre rangsorolni, akik a legtöbbet vesztik a következő iskolájukba kerülve (Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda, 2009).

### 2.4.4. Alternatív javaslat: A választással bővített késleltetett elfogadási algoritmus (Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda, 2008)

A választással bővített késleltetett elfogadási algoritmus (*choice-augmented deferred acceptance algorithm*, röviden: CADA, Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda, 2008) egyesíti a két algorit-

[6]New York és 2010-től Szöul gyakorlati példák, ahol az iskolák nem rendelkeznek, vagy rendelkezhetnek preferenciákkal a jelentkezőkkel kapcsolatban.

mus előnyeit azokban a helyzetekben, amikor az iskolák nem, vagy csak részben rendelkeznek preferenciákkal a jelentkező hallgatók között, amikor sok jelentkező marad egy-egy az iskolák által nem rangsorolt csoportban.

A késleltetett elfogadási algoritmus alkalmazásához szükség van a holtversenyek feloldásához. Itt az előző fejezetben alkalmazott módszerek (STB, MTB) helyett egy alternatív módszert alkalmazunk. Az új algoritmus (Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda, 2008) az alábbi lépésekből áll:

1. A tanulók a jelentkezési lapon az iskolák sorrendje mellett megjelölhetnek egy cél-iskolát. Amennyiben a jelentkező él ezzel a lehetőséggel, azt mondjuk, hogy azt az iskolát célozta meg.

2. A jelentkezőkre meghatározunk egy, a célzott, és egy a többi iskolára vonatkozó rangsort. A rangsor az egyes, az iskola által további sorrend nélkül besorolt jelentkezők rangsorának meghatározására szolgál a következő módon: Először a legjobbnak tekintett jelentkezőket vesszük, a csoporton belül az előbb meghatározott rangsorok mérvadók, de előre vesszük a szóban forgó iskolát megcélzó jelentkezőket. Ezután vesszük a további csoportokat, egészen addig, míg el nem fogynak a jelentkezők.

3. A jelentkezők a továbbiakban a jelentkező-optimális késleltetett elfogadási algoritmus alapján kerülnek besorolásra. Az algoritmus alapja egyrészt a jelentkezők által az 1. lépésben megadott ordinális preferenciák, másrészt az iskolák tanulókra vonatkozó gyenge preferenciáinak a 2. lépésben leírt módosítása.

Hogy az algoritmus világosabb legyen, vegyük az alábbi egyszerű példát (Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda, 2008):

**2. Példa.** *A példában 5 tanuló ($s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$) két iskolába ($C_1, C_2$) jelentkezik. Utóbbiak teljesen közömbösek a hallgatókkal kapcsolatban, azaz minden jelentkező egy preferencia-osztályba kerül. Tegyük fel, hogy $s_1, s_3$ és $s_4$ a $C_1$, a többiek az $s_2$ iskolát célozták meg és, hogy a preferencia-egyenlőségek feloldásához az alábbi sorrendeket dobta ki a véletlen forrásunk:*

$$C = s_3, s_5, s_2, s_1, s_4, \quad \textit{illetve} \quad T = s_3, s_4, s_1, s_2, s_5. \tag{2.4.1}$$

A $C_1$ iskola előre veszi a $s_1, s_3$ és $s_4$ jelentkezőket, mivel ők ezt az iskolát célozták meg. Az ő rangsorolásukhoz a $C$ rangsort alkalmazzuk, tehát $s_3, s_1, s_4$. A többiek nem ezt az iskolát célozták meg, azaz esetükben a $T$ rangsort alkalmazzuk, tehát az ő sorrendjük $s_2, s_5$. Összegezve

$$P(C_1) = s_3, s_1, s_4, s_2, s_5$$

Hasonló módon kapjuk meg a $C_2$ iskola szigorú preferenciasorrendjét (itt természetesen $s_2$ és $s_5$ esetében alkalmazzuk $C$ a többiek esetében a $T$ véletlen sorrendet):

$$P(C_2) = s_5, s_2, s_3, s_4, s_1.$$

A hallgatói (szigorú) preferenciák ismeretében már alkalmazhatjuk a késleltetett elfogadási algoritmust.

Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2008) kiemelik, hogy ez a javaslat jobb az STB módszernél, hiszen azáltal, hogy nem egy, hanem két véletlen sorrend is létezik, kisebb az esélye annak, hogy valaki mindig a sor végére kerül. Ez garantálható lett volna pl fordított listák alkalmazásával is, ugyanakkor az a tény, hogy sok iskola esetén a megcélzott iskoláikban a jelentkezők kivételes bánásmódra számíthatnak, nagyobb előnyt biztosít számukra, mint pusztán a csoporton belül egy szerencsésebb hely.

Az algoritmus természetesen finomítható például több célintézmény (rangsorolt) megadásával, ahol a holtversenyek prioritásánál azokat vesszük figyelembe, akik első helyen, majd azokat, akik második, stb. nevezték meg a kérdéses iskolát célintézményként. Az érvelés lényegében ugyanez marad.

## 2.5. Jóléti megfontolások

Az alternatív javaslat bevezetését elsősorban jóléti megfontolások indokolták. Bár a stabilitás praktikus okokból, az őszinteség pedig a naív jelentkezők védelmében lehet fontos (utóbbit Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2009) cáfolja) a társadalmi tervező, – aminek a szerepét a törvényhozó vállalja magára – elsődleges célja a társadalmi jólét növelése kell, hogy legyen, még olyan esetekben is, mint a felvételi algoritmus meghatározása. Egy ilyen kontextusban nehezen védhető egy olyan rendszer, amit egy másik párosítás Pareto-dominál.

Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2008) részletesen vizsgálja az algoritmusok hatékonyságát. A használt modell több ponton eltér az eddig tárgyalttól, részben technikai okokból (ezzel a modellel bizonyos értelemben könnyebb dolgozni), másrészt mivel ezzel a modellel látványosabbak az eredmények. A különbség lényege, hogy végtelen sok jelentkező párosítását vizsgáljuk, a hallgatókon mértékeket definiálnak, és egy párosítás során a hallgatók pozitív mértékű részhalmazait rendelik az egyes iskolákhoz. Továbbra is feltételezzük, hogy az iskolák indifferensek a jelentkezők között, és, hogy a jelentkezők egyformán vélekednek az iskolákról, azaz mind ugyanazzal a (szigorú) preferenciasorrenddel rendelkeznek. Jelen dolgozat keretei között túlzás lenne egy külön szakaszt áldozni eme matematikai apparátus bevezetésének és a fogalmak precíz definícióinak, ezért csak az eredmények informális összefoglalására szorítkozunk.

### 2.5.1. Dominancia és optimalitás

A Pareto-dominancia közismert fogalma mellé egy újabb fogalom kerül bevezetésre, melynek neve *ordinális optimalitás* (Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda, 2008, 3.2 szakasz). Egy $\phi'$ párosítási mechanizmus ordinálisan dominálja a $\phi$ párosítási mechanizmust, ha nagyobb eséllyel[7] rendeli a jelentkezőket preferált iskoláikba.

Egy párosítás ordinálisan optimális, ha nincs olyan párosítás, ami ordinálisan dominálná. Ez a feltétel pontosan akkor teljesül, ha nincs cserekör a párosításban, azaz, ha nem létezik a hallgatóknak olyan csoportja, hogy tagjait valamely sorrendben körbeállítva mindenki boldogabb lenne a tőle jobbra álló iskolájával (Bogomolnaia és Moulin, 2001).

A következőket állapíthatjuk meg: A DA-STB[8] utólag Pareto-optimális, de nem ordinálisan optimális. Ha viszont minden határon túl növeljük a jelentkezők számát, tetszőlegesen közel kerül ehhez a tulajdonsághoz (Che és Kojima, 2008). Ugyanakkor, ha az iskolák nem indifferensek a hallgatók között, akkor a DA-STB algoritmus még csak nem is Pareto-hatékony (Ab-

[7] Az elsőrendű sztochasztikus dominancia szerint.

[8] Késleltetett elfogadási algoritmus az STB indifferencia-feloldó mechanizmussal.

dulkadiroğlu, Pathak, és Roth, 2009) viszont elegendően nagy számú iskola esetén a tulajdonság a DA-MTB algoritmusra is érvényes.

A CADA algoritmus vizsgálatakor már pozitívabb eredményekről számolhatunk be. A CADA ordinálisan hatékony és ha egy iskola kivételével a többiben túljelentkezés van, illetve ha a jelentkezők által megadott megcélzott intézmények, mint stratégiák egyensúlyt alkotnak, akkor Pareto-hatékony is. Ha a vizsgálatot a népszerű iskolákra korlátozzuk[9], akkor ott a CADA Pareto-hatékony.

### 2.5.2. Szimulációk

Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2008) az elméleti megfontolásokat szimulációkkal egészítették ki. Egyrészt vizsgálták a fenti három algoritmus viselkedését, másrészt Erdil és Ergin (2008) bevezetett egy módszert, amivel a hagyományos késleltetett elfogadási algoritmus által generált párosításon lehet utólagosan javítani. Különösen érdekesnek bizonyult a stabil javító körök (stable improvement cycles, SIC) kombinációja a DA-STB algoritmussal.

Míg az elméleti modellben egy meglehetősen szélsőséges esetet vizsgáltak, ahol a jelentkezők preferenciái azonosak, itt egy $\alpha$ paraméter segítségével ezt a feltételt kicsit lazítjuk: a jelentkezőknek egy adott iskolára vonatkozó Neumann-Morgenstern $\alpha$ részben egy közös, minden jelentkezőre érvényes részből és $1-\alpha$ részben egy egyedi értékelésből áll. A szimulációk szerint, amennyiben a közös értékelés domináns $\alpha > \frac{1}{2}$ a CADA, míg egyébként a DA-STB+SIC viselkedik jobban.

## 2.6. Összegzés

A fejezetben bemutattuk a főbb, a dolgozat szempontjából releváns párosító algoritmusokat és a főbb elméleti eredményeket. Bár a késleltetett elfogadási algoritmus sok elméleti szempontból vonzó tulajdonsággal is rendelkezik, ezen felül a „használata” sem bonyolult, hiszen a valós preferenciák felfedése domináns, mégis van, aki bizonyos értelemben visszalépésnek tekinti a

[9]Nyilván ez az érdekesebb eset, hiszen az aluljelentkezett iskolákba egyszerűen felvesznek minden jelentkezőt.

korábban sokfelé alkalmazott bostoni algoritmussal szemben.

A fejezet második felében Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2008, 2009) eredményeit foglaltuk össze, akik némi megértéssel fordultak ezen kritikák felé és – a stabilitást, mint fontos tulajdonságot szem előtt tartva – megpróbálták ötvözni a két algoritmust. Eszerint a bostoni-típusú preferenciák csak a döntetlenek feloldásában játszanak szerepet, ami azonban meghatározó egy olyan helyzetben, ahol az iskolák a jelentkezők többségével/egészével kapcsolatban indifferensek. Az új algoritmus főleg az ilyen helyzetekben előnyös más algoritmusokkal összevetve. Amennyiben a jelentkezők preferenciáit lényegében egy közös iskolai rangsor határozza meg, igen jól működik ordinális optimalitás szempontjából.

Ez az analízis részleges, hiszen a CADA mindössze a késleltetett elfogadási algoritmus két-három változatával kerül összevetésre, azonban jól illusztrálja, hogy mennyire függ a párosítandó „piac” jellemzőitől, hogy melyik algoritmus a legalkalmasabb a párosítás lebonyolítására.

A továbbiakban rátérünk a magyarországi felvételi rendszerekre, összefoglaljuk a korábbi tanulmányainkban elért eredményeket és összevetjük az elméletet az alkalmazott gyakorlattal.

# 3. fejezet

# A középiskolai felvételi

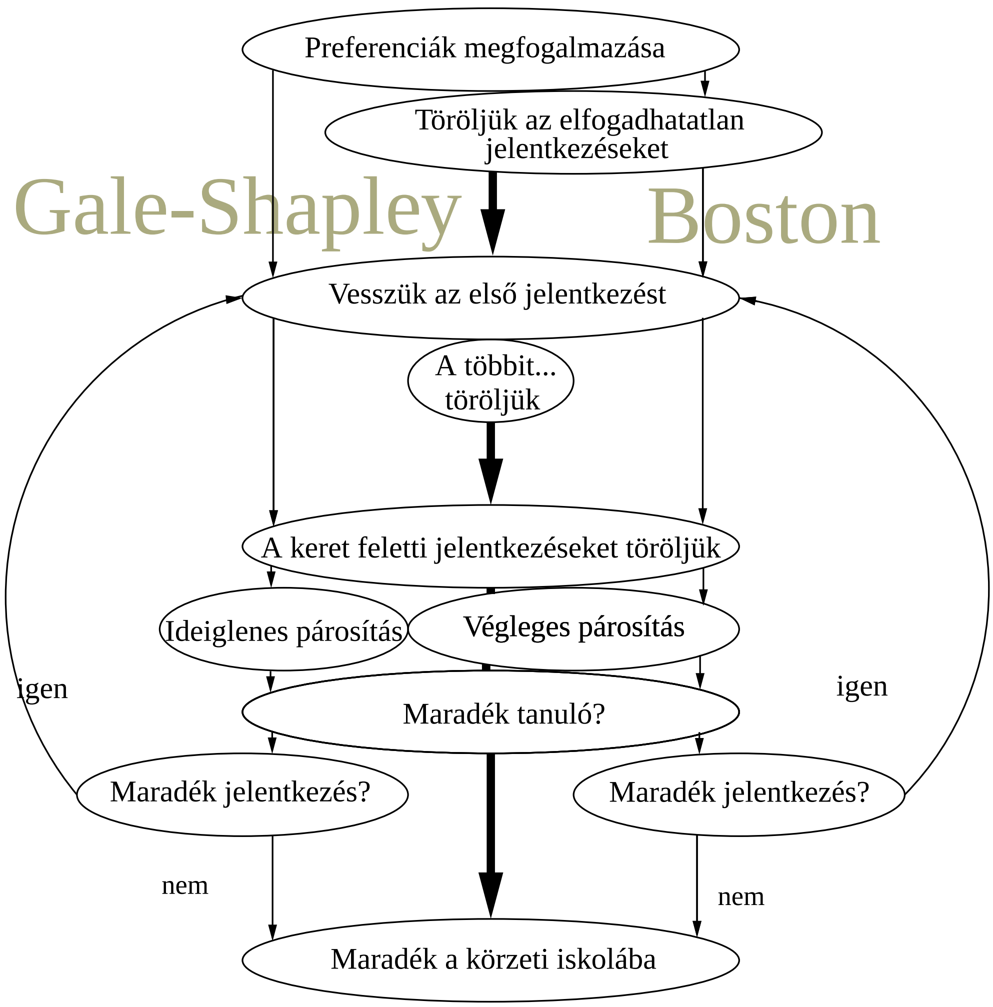
A magyarországi középiskolai felvételit egységesen szabályozza a 11/1994. (VI. 8.) MKM rendelet 8. számú melléklete. Mint korábbi dolgozatunkban (Kóczy, 2009b) is leírtuk, a rendelet nagy vonalakban meghatározza a felvételi algoritmust. Ennek a megközelítésnek megvan az az előnye, hogy amennyiben az algoritmus világos, jól definiált, a mechanizmus vak alkalmazásával tökéletesen követhetjük a törvényt. Kevésbé szerencsés, hogy amennyiben az algoritmus megfogalmazása nem világos, vagy rosszul definiált, a végrehajtó nehéz helyzetben van. Végül hátránya az is, hogy az elemző vajmi keveset tud meg belőle a törvényhozó szándékából. Sajnos a fent nevezett törvény esetében is egy nem elegendő körültekintéssel megfogalmazott jogszabályról van szó. Az alábbiakban összehasonlítjuk a rendelet által előírt párosítási algoritmust a gyakorlatban alkalmazottal.

## 3.1. A törvény

A rendelet 7.6. pontja fogalmazza meg a tulajdonképpeni párosítási algoritmust. Ezt az alábbiakban összegezzük:

1. A jelentkezők megfogalmazzák preferenciáikat, majd ennek alapján tetszőleges számú iskolát (szakot, stb.) rangsorolva beadják jelentkezésüket.

2. Az egyes iskolák rangsorolják az oda jelentkezett tanulókat.




3.1. ábra. A gyakorlatban alkalmazott Gale-Shapley, a jogszabályi és a bostoni algoritmusok összehasonlítása

3. Az iskolák megnevezik azokat a tanulókat, akiknek a jelentkezését elfogadják.

4. A hivatal minden tanuló esetében csak az általa preferált, elfogadott jelentkezést őrzi meg, a többit törli.

5. Ezek után minden iskola csak a felvételi keretszámig tarthatja meg az általa elfogadott és az előző lépésben nem törölt jelentkezéseket.

6. A felvétel nélkül maradt iskolaköteles tanulók a körzeti középiskolába nyernek felvételt.

Hogy az algoritmus viselkedése világossá váljék, vegyük az alábbi példát.

**3. Példa.** *Vegyünk egy $k$-$k$ iskolából, illetve jelentkezőből álló problémát a következő preferenciákkal:*

$$P(C_1) = \cdots = P(C_k) = s_1, s_2, s_3, \ldots s_k \quad (3.1.1)$$

$$P(s_1) = \cdots = P(s_k) = C_1, C_2, \ldots C_k. \quad (3.1.2)$$

*Tegyük fel, hogy $C_k$ a körzeti iskola, valamint, hogy az iskolák kvótája $q^{C_1} = q^{C_2} = \cdots = q^{C_{k-1}} = 1$, $q^{C_k} = k$ (azaz $C_k$ mindenkit felvehet).*

Mivel alapvetően jó tanulókról van szó, minden iskola számára elfogadhatók, így a 4. lépésben minden hallgató esetében csak a legjobb elfogadható, azaz a $C_1$-be való jelentkezés marad meg. Mivel itt a maximálisan felvehető létszám 1 fő, csak $s_1$ kerülhet felvételre, míg a többi jelentkező elutasításra kerül, ők a körzeti, általuk leggyengébbnek ítélt iskolába kerülnek felvételre.

$$\mu_1 = \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & \ldots & C_{k-1} & C_k \\ s_1 & C_2 & \ldots & C_{k-1} & s_2, s_3, \ldots, s_k \end{array}$$

A párosítás nyilvánvalóan nem stabil. Az is világos, hogy $s_2$ jobban járt volna a $P(s_2) = C_2, \ldots C_k$ preferenciaprofil megadásával, azaz e mellett az algoritmus mellett érdemes taktikázni.

Az algoritmus során nyilvánvaló, hogy az egyik probléma az, hogy az iskolák túl sok tanulót neveznek elfogadhatónak. Az elfogadási listák korlátozása gyakran sem az iskoláknak, sem pedig a hallgatóknak nem érdeke. Ha ugyanis a fenti példában az elfogadható tanulók listájának maximális hosszát a kvóta kétszeresében állapítjuk meg, akkor a legtöbb tanuló nem is kap a körzeti iskoláján kívül elfogadási ajánlatot, a párosítás tehát ugyanaz marad. Ebben a helyzetben pedig már a taktikázás sem segít.

Természetesen ugyanerre a következtetésre jutunk akkor is, ha csak a felvételi keretszámig fogadhatnak el az iskolák jelentkezéseket. Ez már csak azért sem volna logikus, mert a törölt jelentkezések miatt sok jelentkezés kiesik később.

Az algoritmus sok közös vonást mutat az úgynevezett bostoni algoritmussal (l. a 2.4.2 mellékletet). A bostoninál az első körben kizárólag az első jelentkezéseket vesszük figyelembe, még akkor is, ha egy tanuló valamilyen oknál fogva az iskola számára nem elfogadható és így oda szánt jelentkezése azonnal törlődik. Ezzel szemben ez az algoritmus a legjobb *elfogadható* jelentkezést veszi figyelembe. A bostoni algoritmus esetében az elutasított jelentkezők kapnak egy (vagy több) újabb esélyt azáltal, hogy a megmaradt helyekre pályázhatnak a második (illetve későbbi[1]) jelentkezéseikkel, míg a jogszabály szerint ezek a tanulók a körzeti iskolájukba kerülnek. Valószínű, hogy a jogszabály-alkotó nem a fenti $\mu_1$ párosítást tartotta kívánatosnak, tehát valahol az algoritmus leírása pontatlan.

Mielőtt arra rátérnénk, hogy a jogszabályban szereplő algoritmus milyen mechanizmusnak lehet hiányos leírása, tekintsük át a gyakorlatban alkalmazott párosítási algoritmust.

## 3.2. A gyakorlat

A középiskolai felvételi központi párosítási algoritmusa szinte egy az egyben követi a Gale-Shapley, azaz késleltetett elfogadási algoritmust (Gale és Shapley, 1962), illetve annak közvetlen általánosítása a sok-az-egyhez párosításokra (2.4.1. melléklet).

A Gale-Shapley algoritmus a párosítások elméletének mondhatni kiindulópontja. Ezzel az algoritmussal igazolták a stabil párosítások létezését. Mivel a stabilitás a párosítások egyik központi kérdése, további párosítási algoritmusok vizsgálata során gyakran felmerülő kérdés, hogy stabil párosítást eredményez-e, azaz tudja-e azt, amit a Gale-Shapley algoritmus.

A késleltetett elfogadási algoritmusból következően a kapott párosítás stabil. Mivel jelen esetben tanuló-optimális késleltetett elfogadási algoritmusról van szó, ezért a stabilitás mellett azt is tudjuk, hogy a párosítás hatékony és a jelentkezők számára domináns stratégia a valós preferenciák felfedése.

Nyilvánvaló, hogy a Gale-Shapley algoritmus alkalmazása esetén a fentitől eltérő, $\mu_2$ párosítást kapjuk:

[1] Bostonban az egy tanuló által leadott jelentkezések száma nem lehetett több, mint 3.

$$\mu_2 = \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \dots & C_{k-1} & & C_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k-1} & s_k, \underbrace{C_k, \dots, C_k}_{k-1} \end{array}$$

Mint már előrebocsájtottuk, a jogszabályban rögzített párosítás leginkább a bostoni algoritmus pontatlan leírásának tűnik. Mennyiben van tehát összhangban a gyakorlat az előírásokkal?

## 3.3. Elemzés

Miután bemutattuk a jogszabályban leírt és az azzal rokon bostoni, illetve a gyakorlatban alkalmazott késleltetett elfogadási, vagy más néven Gale-Shapley algoritmust, rátérünk a két algoritmus összehasonlítására. Sajnos abból kell kiindulnunk, hogy a jogszabály nem tükrözi a törvényhozó valós szándékát, hiszen a leírt algoritmus nyilvánvalóan nem jó. Kérdés, hogy milyen algoritmus hiányos leírásáról van szó.

### 3.3.1. Az elmélet és a gyakorlat

A 3.1. ábrán összehasonlítjuk a késleltetett elfogadási azaz Gale-Shapley, a 11/1994. (VI. 8.) MKM rendelet 8. számú mellékletében leírt és a bostoni algoritmusokat. Látható, hogy a Gale-Shapley és a bostoni algoritmusok, miközben drámai módon különböznek tulajdonságaikban és természetesen az általuk előállított párosításokban is alapvetően csak egy ponton térnek el: amikor egy jelentkező helyet kap egy iskolában, a bostoni mechanizmus esetében ez a megszerzett hely már biztos, míg a Gale-Shapley algoritmus esetén egy máshonnan kieső, ha úgy tetszik „később érkező," de az iskola preferenciáját élvező jelentkező kiütheti onnét. Mivel egy késleltetett elfogadásról van szó, pontosan innen ered az algoritmus elnevezése. Ebből a szempontból a törvényben leírt algoritmus közelebb áll a bostonihoz, hiszen ott is igaz, hogy az *elfogadott* jelentkezések mellett az esetleg fennálló további jelentkezések törlésre kerülnek.

### 3.3.2. Jóléti megfontolások

Kérdés tehát, hogy melyiket kellene alkalmazni: a jelenleg használt késleltetett elfogadási algoritmust, vagy pedig a törvényben foglalt leíráshoz közelebb álló bostonit. Mint az előző fejezetben részletesen bemutattuk, a tanuló-optimális késleltetett elfogadási algoritmus stabil párosítást eredményez, és a jelentkezők számára domináns stratégia nem más, mint a valós preferenciáik megadása. Ugyanakkor Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2009) igazolja, hogy bizonyos helyzetekben, amikor az iskolák közömbösek a jelentkezők iránt, a jelentkezők pedig erősen korrelált stratégiákkal rendelkeznek, a bostoni algoritmus akár minden jelentkező számára kedvezőbb párosítást eredményezhet, miközben az iskolák természetesen a párosításokkal szemben is közömbösek. Mindez éppen a sokat vitatott taktikázásnak köszönhető.

A magyarországi középiskolai rendszerben az iskolák egy jól definiált rangsort határoznak meg a jelentkezőkkel kapcsolatban. Mi tehát a fentiek relevanciája? Először a jelentkezések természetét vizsgáljuk. Egyrészt nagy verseny folyik a néhány nagy hírű, országos merítésű elitgimnáziumba való bekerülésért. Ugyanakkor a jelentkezések jelentős részét helyi: városi, megyei gimnáziumokba valók teszik ki.[2] Van tehát néhány iskola kiemelkedő felsőfokú továbbtanulási statisztikákkal, amik a legtöbb jelentkező rangsorának elején találhatók (vagy sehol), majd ezután következnek a területi vonzáskörű iskolák. Ez a rész csak a megfelelő területről származó jelentkezők esetében egyezik, azonban valószínűsíthetjük, hogy a különböző területekről érkező jelentkezők érdekei kevéssé keverednek éppen az iskolák területi vonzásköre miatt. Öszszességében egy ilyen preferencia profil viselkedésében nem különbözik az erősen korreláló preferenciáktól.

Nézzük a másik feltételt! A középiskolák részben a felvételi vizsgák eredménye, részben a felvételi beszélgetés alapján rangsorolják a jelentkezőket. Ezeket a rangsorokat az igazán kiváló, például tanulmányi versenyeken kiemelkedőt felmutató jelentkezők vezetik. Belőlük ugyanakkor nincs sok, még talán a legelitebb iskolák sem tudnak velük egy teljes osztályt feltölteni. A további jelentkezők rangsorolása már esetleges. A rangsorolás összesített pontok alapján történik, tehát

[2] Pósfai Péter, az Oktatási Hivatal közoktatás-szakmai elnökhelyettesének szóbeli közlése. Pósfai a középiskolai felvételi rendszer egyik kidolgozója.

az éppen felvett és a már elutasított jelentkező között lehet, hogy csak 1 pont a különbség. Nem véletlen a gyakorlatban oly sok helyen elterjedt 5-7 jegyből álló osztályozási rendszer. Az ennél pontosabb értékelésnek ritkán van értelme: az 1 pontos eltérésnél valószínűleg jóval nagyobb a felvételi beszélgetésre adott pontszám (becslési) hibája. Az iskola számára nem bír különös jelentőséggel a rangsor, belefér a tévedés, hiszen számára teljesen mindegy, melyik közepes képességű jelentkezőt veszi fel (ez az indifferencia lényege), ugyanakkor a jelentkezők számára fontos döntések születnek.

### 3.3.3. Nyitott kérdések

Ezek a válaszok újabb kérdéseket vetnek fel. Célszerű volna megvizsgálni mennyire korrelálnak a jelentkezők preferenciái, illetve, hogy a különböző pontszámokkal felvételt nyert tanulók valóban máshogy teljesítenek-e, vagy mondhatjuk-e azt, hogy – s ez elsősorban a második vonalbeli iskolákra igaz – a pontszámok csak egy igen durva becslést adnak a tanulók képességeire. Azt látjuk-e például, hogy az elit gimnáziumok tanulói mind sokkal jobb érettségi eredményeket érnek el, mint az oda be nem került tanulók.[3] Ha feltételezéseink megerősítést nyernek, akkor már nem is olyan egyértelmű, melyik algoritmus a kedvezőbb. Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2008) meglátása szerint nincs elegendő érv sem a bostoniról a késleltetett elfogadási algoritmusra, sem a fordított irányban való áttérés mellett. Sajnos arra az esetre nem térnek ki, hogy mi a teendő, ha a jogszabály a bostoni mechanizmust írja elő, míg a gyakorlatban a késleltetett elfogadási algoritmust használjuk.

[3]Itt már előre jelezzük egy félelmünket, ami a következő fejezetben kap majd szerepet, nevezetesen, hogy a jobb középiskolákban esetleg a magasabb színvonal, szigorúbb osztályzás – *ceteris paribus* – rosszabb érettségi eredményt is jelent.

# 4. fejezet

# A felsőoktatási felvételi

A felsőoktatási felvételi rendjéről a többször módosított 2005. évi CXXXIX. törvény (T) harmadik részének első „A hallgatói jogviszony keletkezése” című fejezete, illetve a 237/2006. (IX. 27.) Kormányrendelet (KR) „a felsőoktatási intézmények felvételi eljárásáról” rendelkezik. Mennyiben felel meg a gyakorlat a törvények előírásainak? Ha eltérés mutatkozik, az alkalmazás hibás, vagy esetleg a törvény rossz? Ebben a fejezetben a felsőoktatási felvételi elméleti, törvényi koncepcióját és gyakorlati alkalmazását vetjük össze. Először a magát a besorolási algoritmust vizsgáljuk, majd rátérünk a felvételire való jelentkezések jelenlegi rendszerének anomáliáira.

## 4.1. A vonalhúzás

Egy korábbi dolgozatunkban (Kóczy, 2009b) részletesen elemeztük a jogszabályokat és megállapítottuk, hogy a besorolási algoritmus megadása helyett normatív megközelítést alkalmaznak, azaz az elérni kívánt párosítás tulajdonságait fogalmazzák meg, nyitva hagyva a gyakorlati megvalósítás kérdését. Ez a megoldás tudományos szempontból kedvezőbb, hiszen lehetőséget ad arra, hogy a tudomány jelenlegi állása szerint a legkedvezőbb algoritmust alkalmazzuk. Hátránya, hogy a túl sok elvárás esetleg egyszerre nehezen, vagy egyáltalán nem teljesíthető, így az illetékes szervet lehetetlen feladat elé is állíthatja. Sajnos a szóban forgó jogszabállyal is egy kicsit ez a helyzet. Egyrészről előírja, hogy a párosítást pontszámítás alapján és a hallgatók preferenciájának figyelembevételével kell meghatározni, másrészről megfogalmaz egy olyan optimalizálási feltételt is, mely szerint a párosításkor az államilag finanszírozott helyek lehető legjobb kihasználására kell törekedni.

A felvételi algoritmus (Kóczy, 2009a), eltekintve bizonyos speciális esetektől, hallgató-optimális stabil párosítást eredményez. Sajnos a kettő akár jelentősen eltérő párosítást is adhat. Hogy ezt illusztráljuk, vegyük a következő példát (ami, ha lehet még drasztikusabb, mint a korábban (Kóczy, 2009b) bemutatott):

**4. Példa.** *Vegyünk egy $k$-$k$ iskolából, illetve jelentkezőből álló problémát a következő preferenciákkal:*

$$P(C_1) = \cdots = P(C_k) \quad = \quad s_1, s_2, s_3, \ldots s_k \tag{4.1.1}$$

$$P(s_1) \quad = \quad C_1, C_2, \ldots, C_k \tag{4.1.2}$$

$$P(s_2) = \cdots = P(s_k) \quad = \quad C_1, C_2, \ldots C_{k-1}. \tag{4.1.3}$$

*Tegyük fel, hogy $C_k$ az egyetlen államilag támogatott szak, valamint, hogy az iskolák kvótája $q^{C_1} = q^{C_2} = \cdots = q^{C_k} = 1$.*

Világos, hogy mivel $s_1$ az egyetlen, aki számára az államilag támogatott $C_k$ elfogadható, a törvény szerint akkor optimális a besorolás, ha $s_1$ $C_k$-mal kerül párosításra. Ez azonban csak úgy valósítható meg, ha az összes többi szakon olyan magas felvételi ponthatár kerül meghatározásra, hogy már a legerősebb jelentkező, $s_1$ sem nyer felvételt. Ennek megfelelően a párosítás

$$\mu_1 = \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & \ldots & C_{k-1} & C_k \\ C_1 & C_2 & \ldots & C_{k-1} & s_1 \end{array}$$

azaz mindössze 1 jelentkező nyerhet felvételt.

Ezzel szemben a hallgató optimális stabil párosítás

$$\mu_2 = \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & \ldots & C_{k-1} & C_k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{k-1} & C_k, \end{array}$$

itt pedig 1 jelentkező kivételével mindenki felvételt nyer. Bár a példa egy meglehetősen mesterkélt helyzetet vizsgál, az a tény, hogy a pótfelvételire is rendszeresen maradnak államilag finanszírozott helyek, mutatja, hogy a szakok közötti preferencia erősebb, mint a finanszírozás formája, más szóval, léteznek olyan szakok, amik még ingyen sem kellenek.

Bár a példában elszomorító, hogy $\mu_1$ mellett sokkal kevesebben kapnak helyet, elméleti szempontból érdekesebb és nagyobb probléma, hogy a kapott párosítás nem stabil. Ahhoz, hogy a stabilitás teljesüljön, minden egyes szakon törekedni kell a felvételi keret – elfogadható hallgatókkal való – kitöltésére.

Világos tehát, hogy ez az apró kiegészítés, mely az optimalizálás célfüggvényét rögzíti, egy szélsőségesen rossz párosítást eredményez, tehát az, hogy a gyakorlatban ez a szempont nem szó szerint került alkalmazásra inkább nevezhető örvendetesnek.

Nagyobb baj, hogy a vonalhúzási besorolási algoritmus csak akkor eredményez optimális párosítást, ha a jelentkezők preferenciái megfelelnek a valóságnak. Ha a megadott preferenciák torzultak, akkor a párosítás ezekhez képest lesz optimális, ami tetszőlegesen viszonyulhat a valós preferenciákhoz. A következő szakaszban a jelentkezés mikéntjét és a magyar felsőoktatási felvételire jellemző megszorításokat elemezzük.

## 4.2. Jelentkezési korlátok

A stabil párosítások létezésének igazolásához Gale és Shapley (1962) a késleltetett elfogadási algoritmust alkalmazta. Később Knuth (1976) igazolta, hogy az egy-az-egyhez párosítások esetén bármelyik fél számára van olyan stabil párosítás, amely minden más stabil párosításnál kedvezőbb. Az eredményt Roth (1984) általánosította a sok-az-egyhez párosításokra. Ebben a kontextusban iskola-, vagy hallgató-optimális stabil párosításról beszélhetünk.

Az egy-az-egyhez párosításokra Dubins és Freedman (1981) igazolta, hogy a férfi-optimális párosítás esetén a férfiak számára domináns stratégia a valós preferenciák felfedése. Ezt az eredményt jóval nehezebb volt sok-az-egyhez párosításokra általánosítani, de Roth (1985) igazolta, hogy nincs olyan stabil párosítás, ahol az iskoláknak mindig érdekében állna valós preferenciáik felfedése, viszont a hallgatók számára a hallgató-optimális stabil párosítás esetén ez egy domináns stratégia (Roth, 1986). Mivel az iskolák preferenciáinak meghatározását jogszabály rögzíti, az iskoláknak nincs is lehetősége arra, hogy a valós preferenciáik helyett valami mást tegyenek közzé. Ugyanakkor a hallgató-optimális stabil párosításnak köszönhetően a jelentkezők számára domináns stratégia valós preferenciáik felfedése. Pontosabban az lenne, ha a preferenciák felfedésének nem lenne költsége. Egy korábbi tanulmányunkban (Kóczy, 2009a) részletesen bemutattuk a felvételi költségeit: az első három jelentkezés költsége 9000 Ft., majd minden további jelentkezés további 2000 Ft.-os díjat von maga után.

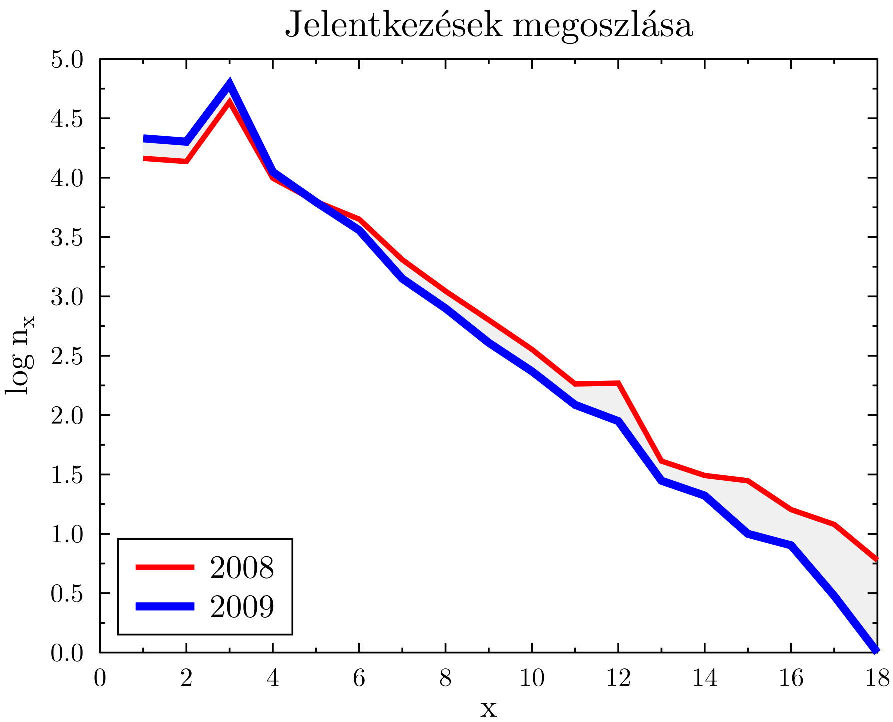
Ilyen feltételek mellett egy közepes esélyekkel nekifutó jelentkezőnek nincs igazán értelme a legjobb iskolákat felsorolnia. Haeringer és Klijn (2009) kimondja, hogy amennyiben a jelentkezések száma kevesebb, mint az elfogadható szakoké, akkor az elfogadható szakok valamely részhalmazát kell megnevezni, méghozzá a valós preferenciasorrendben. Ez egy dominálatlan stratégia, vagyis nincs olyan, ettől különböző stratégia, amely minden helyzetben legalább ilyen jól teljesít. Megállapítható továbbá, hogy ha korlátozzuk a hallgatónként leadható jelentkezések számát, akkor a preferencia-megadási játék Nash egyensúlya a hallgató-optimális stabil párosítást adja (Haeringer és Klijn, 2009; Ergin és Sönmez, 2006).

Jelen esetben a megadható jelentkezésekre nem vonatkozik merev korlát, azonban a fizetendő díj puha korlátként viselkedik. Előrebocsájtjuk, hogy a jelentkezések kb. 30%-a még a jelentkezés alapdíja mellett megengedett 3 jelentkezést sem használja ki. Ennek aligha oka az, hogy az érintettek legfeljebb 2 elfogadható szakot találtak, itt elsősorban arról lehet szó, hogy a jelentkezők nem igazán voltak tisztában a jelentkezés körüli szabályokkal.

A továbbiakban azt igazoljuk, hogy a jelentkezések után fizetendő kiegészítő díj jelentős visszatartó erő. Az érvelésünk alapgondolata, hogy a jelentkezőket két csoportra osztjuk: azokra, akik anyagi szükségben élnek, valamint azokra, akik számára a jelentkezés díja – egyszer az életben – elviselhető és a sikeres felvételi fontosabb, mint a plusz jelentkezések pótdíja. A *szegény* jelentkezők 3, legfeljebb 4 helyet jelölnek meg, míg a *gazdagok* tetszőleges számút. Vizsgálatunkra lehetőséget a tandíj 2007-es bevezetése jelenti. Mivel a 2008-as felvételi beadásakor bizonyosnak látszott, hogy minden hallgatónak tandíjat kell fizetnie, a szegény jelentkezők ekkor nem vettek részt a felvételin. Nem sokkal később azonban a tandíj eltörlésre került, így ezek a jelentkezők a következő évben többletként jelentkeztek.

Ha nullhipotézisként abból indulunk ki, hogy kiegészítő díjak nem befolyásolják a preferenciákat, akkor 2007, 2008 és 2009-ben is hasonló lesz a jelentkezések eloszlása. A hipotézis vizsgálatára 3 lehetséges módot látunk.

Kézenfekvő lenne a jelentkezések között a finanszírozás módja szerinti összetételét vizsgálni[1] A nullhipotézis helyessége esetén az összetétel nem változik jelentősen a jelentkezések számával: a szegény, csak állami finanszírozású programokra jelentkező hallgatók is ugyanannyi szakot jelölnek meg, mint gazdag társaik. Sajnos megfelelő adatok hiányában ezt a módszert nem tudtuk követni.




4.1. ábra. Az egy jelentkező által leadott jelentkezések szám szerinti megoszlása

Modellezhetnénk a jelentkezések számának eloszlását is. Itt jól látható, hogy a háromnál nagyobb számú jelentkezések nagyjából exponenciálisan csökkenő trendet mutatnak, ugyanakkor erre a trendre igen rosszul illeszkednek az 1-2-3 jelentkezések. Feltűnő a sok pontosan 3 szakot tartalmazó jelentkezés. Ez a tény már szinte önmagában is jelzi, hogy itt vannak jelentkezők, akiknek több szakot kellett volna megjelölniük, de valamilyen oknál fogva itt falba ütköztek. A két év adatait összehasonlítva szembeötlő, hogy olyan jelentkezőből, aki pontosan $m$ jelentkezést

[1] A jelentkezések számának meghatározásakor az ugyanarra a programra különböző finanszírozási forma szerint leadott jelentkezések egynek számítanak, ugyanakkor nem minden szakra létezik mindkét forma.

adott le, $m > 4$ esetén 2008-ban volt a legtöbb, ugyanakkor $m \leq 4$ esetén 2009-ben a 2008-as jelentkezések közel másfélszeresét regisztrálták (lásd 4.1 ábra.

| év | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|
| átlag | 3,15 | 3,19 | 2,91 |
| szórás(becslés) | 2,66 | 3,09 | 2,12 |
| $t$-statisztika | 5,61 | - | 41,77 |

4.1. táblázat. A jelentkezések átlagos számának statisztikai vizsgálata

Mi a jelentkezések átlagos számának változását vizsgáljuk. A megfelelő értékek $\bar{x}^{2007} = 3,15$, $\bar{x}^{2008} = 3,19$ és $\bar{x}^{2009} = 2,91$, utóbbi különbözősége szinte nyilvánvaló (ne felejtsük el, hogy ezeket az értékek közel százezer jelentkező adataiból számoltuk), de az első két érték különbözősége is igazolható statisztikailag.

Az adatokat a 4.1 táblázatban foglalhatjuk össze ahol a $t$-statisztika a $\mu^{2007} = \mu^{2008}$, illetve $\mu^{2009} = \mu^{2008}$ nullhipotézisek vizsgálatára vonatkozik heteroszkedaszticitást feltételezve. Eszerint az egyezés elutasítható, azaz 2008-ban szignifikánsan több jelentkezést adtak le jelentkezőnként.

## 4.3. Jólét

Az elméleti bevezető tükrében itt is felmerül a kérdés, hogy jóléti szempontból megfelelő-e az alkalmazott algoritmus. Akár a középiskolai felvételi esetében, itt is az iskolák és a jelentkezők preferenciát kell megvizsgálnunk.

### 4.3.1. A jelentkezők preferenciái

Már a középiskolák esetében is felmerült, hogy a jelentkezők preferenciái erősen korreláltak, ez a feltételezés a főiskolák/egyetemek esetében méginkább megállja a helyét. Itt a valódi erényeken, eredményeken alapuló preferenciasorrendek helyett szerepet kapnak a különböző sajtótermékekben, illetve a Felvi által publikált (egymáshoz hasonló) rangsorok is. Ha adott egy ilyen koordinációs pont, akkor a jelentkezők preferenciái is ehhez igazodnak, azaz egymáshoz is hasonlók, egymással korreláltak lesznek. Természetesen a helyzetet kicsit bonyolítja a több szak, hiszen mégha a közgazdász- és orvosi képzéseken belül fel is állíthatunk egy rangsort, a kombinált rangsorban már nehezebb egyezségre jutni – ha másért nem azért, mert aki orvos akar lenni, az az orvosi, aki közgazdász az a közgazdász képzéseket helyezné előkelő helyre. Mivel a legtöbb jelentkező viszonylag kis számú jelentkezést adott le, nem valószínű a különböző képzési területek keveredése, így az egyes képzési területek külön-külön piacnak tekintendők.

### 4.3.2. Az iskolák preferenciái

A vonalhúzás, mint párosító „mechanizmus” talán a lehető legegyszerűbb, legalábbis ami az eredmény kommunikálását illeti. Aki eléri a felvételi ponthatárt az felvételt nyert, aki nem, az nem, ennyire világos a helyzet. Nincs szükség tehát a felvettek listáját közzétenni, iskolánként elég egy szám.

Ezért az eleganciáért másutt sajnos meg kell fizetni az árat. Az egyik, hogy ugyanazon pontszámmal rendelkező jelentkezők vagy mind felvételt nyernek, vagy mind elutasításra kerülnek. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha a szakon vannak még szabad helyek, de kevesebb, mint a következő pontszámmal rendelkező jelentkezők száma, akkor ezek a helyek –elvben– betöltetlenül maradnak. A gyakorlatban egy nem teljesen igazi algoritmusról van szó, ha ugyanis egy iskolában túl sok hely marad betöltetlenül, akkor a felvételi keretszámot kicsit kiigazítják. Bár ez kicsit furcsa értelmezést ad a „férőhely” fogalmának, a gyakorlatban ez a legritkább esetben okoz problémát (különösen az államilag finanszírozott képzések esetében), hiszen ugyanaz a képzés gyakran mindkét finanszírozási formában meghirdetésre kerül, így a másik keretszámának terhére különösebb gyakorlati nehézség nélkül lehet bővíteni a keretet. Más kérdés, hogy ugyanez elérhető lenne magasabbrendű keretszámok alkalmazásával is, erre azonban a jelenlegi rendszer nem ad lehetőséget.

A másik probléma maga a pontszámok meghatározása. A holtversenyek egy nem elhanyagolható nehézséget támasztanak, amin az értékelési skála finomításával lehet segíteni: Természetesen ahogy a pontszámok növekszenek, a holtversenyek esélye csökken. Kérdés azonban, hogy a túl nagy számok esetén 1 pont különbség jelent-e valós differenciát, vagy ugyanennyi erővel véletlen rangsorolást is alkalmazhatnánk. Az idevonatkozó rendelet részletesen meghatározza a pontszámítás módját. A törvényhozónak ehhez természetesen joga van, de ezzel bizonyos átváltásokat vezet be: ha ennyire gyenge lesz az érettségim, akkor le kell tennem egy nyelvvizsgát, stb. A pontszámokat megadó képletben a különböző plusszpontok számítása mindenképpen önkényes, a fenti átváltásokat konkrét esetekben is nehéz elbírálni, pláne általánosságban. További probléma, hogy az érettségi eredmények nem objektívak. Amíg a pontszámítás alapja az osztályzat volt, az esetleges kisebb eltérések ritkán jelentek meg a pontszámokban (bár akkor drasztikusan), most a legkisebb eltérés is eldönthet egy felvételt. Mielőtt ahhoz ragaszkodunk, hogy az azonos pontszámú jelentkezők egyforma elbánásban részesüljenek, ahhoz kellene ragaszkodnunk, hogy a pontszámuk ugyanazon körülmények között kerüljenek meghatározásra. Ez pedig a jelenlegi rendszerben a legkevésbé sem garantált. A gyakorlatban hasonlít egy olyan véletlen rangsoroláshoz, ahol a véletlent az határozza meg, hogy a jelentkező az érettséginél melyik tanárt kapja. Mivel ez a hatás minden iskolánál egyformán érvényesül, ez az algoritmus a késleltetett elfogadási algoritmus STB változatára hajaz, melyről Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2008) megállapították, hogy valamivel kedvezőbb, mint az MTB változat, ahol a véletlen sorsolásra minden egyes iskolánál külön kerül sor. Összegezve, itt megint úgy érezzük, hogy a 480, jövőre (2010.-ben) talán 500 pontig növő maximális ponthatár nehezen indokolható, mesterséges osztályozást kreál. Többletpontok alkalmazásával a CADA algoritmus itt is megvalósítható, hiszen a különféle pluszpontok közé a megcélzott intézménynél járó pluszpont is belefér. Tény, hogy a bónuszként járó pontok száma éppen olyan önkényes mennyiség lenne, mint a jelenleg alkalmazottak.

Mindezek tükrében azt mondhatjuk, hogy az iskolák indifferensek a felvételi ponthatár közelében teljesítő hallgatókkal kapcsolatban. Presztízskérdés, hogy minél magasabb legyen a felvételi ponthatár, de ha ettől eltekintünk és valamilyen oknál fogva egy, kicsivel a ponthatár felett felvett hallgatót le akarunk cserélni egy, kicsivel a ponthatár alattira, valószínűleg nem találkoznánk gyakorlati ellenállással.

### 4.3.3. A preferenciák következménye

Ha a jelentkezők preferenciái jól korrelálnak, az iskolák pedig – a felvételi határ közelében, ha úgy tetszik *lokálisan* – indifferensek, akkor ugyanazok a példák előhúzhatók, melyekben a bostoni algoritmus egyensúlyi helyzetben jobban teljesít, mint a késleltetett elfogadási algoritmus. Ismét idézzük Abdulkadiroğlu, Che, és Yasuda (2008) véleményét, mely szerint a rendelkezésünkre álló bizonyítékok nem biztos, hogy indokolnak egy váltást, ugyanakkor nem árt tisztában lenni az algoritmus bizonyos tulajdonságaival. Amennyiben (1) a ponthatár környékén az iskolák indifferensek a hallgatók között, (2) a hallgatók ordinális preferenciái erősen korrelálnak, ugyanakkor (3) a kardinális preferenciák között jelentős eltérések vannak, akkor a ponthúzásos algoritmus nem minden esetben hatékony, sőt, a bostoni algoritmus is Pareto-dominálhatja.

## 4.4. Összegzés

A felsőoktatási felvételivel foglalkozó rendelet – szemben az előző fejezetben tárgyalttal – nem határoz meg algoritmust, csupán a párosítás néhány alapelvét rögzíti. Eszerint a párosítás alapja a vonalhúzás, és bár arról nem szól hogyan kell meghúzni a ponthatárokat (csupán az államilag finanszírozott helyek lehető legjobb kihasználását várja el), némi józan ésszel kiegészítve a feltételek lényegében a hallgató-optimális stabil párosítást határozzák meg. A gyakorlat ettől alig tér el, pusztán az említett, kicsit szerencsétlen optmializálási célt hagyja figyelmen kívül.

Ugyan itt az elv és a gyakorlat szinte teljesen egyeznek, így igazából választásra nem kényszerülünk, itt is felmerülnek a középiskolai felvételi esetében tárgyalt hatékonysági szempontok. Érvelésünk szerint az egyre finomodó pontozási rendszer egyrészről megkönnyíti az algoritmus alkalmazását, hiszen segít az indifferenciák feloldásában, ugyanakkor úgy érezzük, egyben árt is, hiszen egy határon túl nem szignifikáns különbségek alapján dönt felvétel és elutasítás kérdésében. Így, bár betű szerint megfelelünk annak az elvnek, hogy az azonos pontszámmal rendelkező jelentkezők vagy mind felvétetnek, vagy mind elutasításra kerülnek, a gyakorlatban mondhatjuk azt, hogy statisztikai értelemben azonos eredményt felmutató jelentkezők is juthatnak különböző sorsra. A megfigyelés másik következménye, hogy a felvételi ponthatár környékén az iskolák többsége indifferens a hallgatók között, miközben a jelentkezők preferenciái a koordinációs pontok miatt erősen korreláltak. Ha emellett a hasonló ordinális preferenciák mellett a jelentkezők különböző kardinális preferenciákkal jelentkeznek, akkor hallgató-optimális stabil párosításnál lehet kedvezőbb, magasabb társadalmi jólétet eredményező, sőt azt Pareto-domináló párosítás.

Sajnálatos módon a tanulmány készítésekor nem álltak rendelkezésünkre azok az adatok, melyekkel a fenti hipotéziseket meg lehetne erősíteni, vagy el lehetne vetni. Ez egy nagyon fontos kutatási terület és reményeink szerint egy későbbi tanulmányunkban már kvantitatív eredményekkel is alá tudjuk támasztani a jelenleg még döntően kvalitatív megfigyeléseinket.

# 5. fejezet

# Konklúzió

Tanulmányunk célja a magyarországi felvételi rendszerek[1] kritikai áttekintése volt. Már korábban áttekintettük a szakirodalom legfontosabb idevonatkozó eredményeit (Kóczy, 2008), leírtuk az algoritmusokat és vizsgáltuk ezek tulajdonságait (Kóczy, 2009a), illetve elemeztük a felvételi eljárásokról, konkrétabban a párosítások menetéről szóló jogszabályi szövegeket (Kóczy, 2009b). Itt a célunk a jogszabály és alkalmazásának, illetve a tudományos elméletnek és alkalmazásának összevetése volt.

Mivel a két rendszer speciális tulajdonságait a megfelelő fejezetben összefoglaltuk, itt inkább az általános tanulságokkal foglalkoztunk. A KIFIR által bonyolított középiskolai felvételi és a Felvi által készített felsőoktatási besorolás alapja teljesen más – az eredmény mégis szinte ugyanaz. Míg az első a Gale-Shapley algoritmus vegytiszta alkalmazása, utóbbi egy rendkívül egyszerűen megérthető vonalhúzási algoritmust alkalmaz, a kapott párosítás mindkét esetben a jelentkező-optimális stabil párosítás. Előbbi esetben a rendelet megadja az alkalmazandó algoritmust, utóbbi esetben a rendelet csak bizonyos elvárásokat fogalmaz meg, magát az algoritmust rábízza a lebonyolító hivatalra. Ezekből teljesen nyilvánvaló, hogy a két rendszert egymástól függetlenül, mások dolgozták ki, ami hihetetlen luxus: a legtöbb országban (ahol egyáltalán központi felvételit alkalmaznak) tudományosan nehezen indokolható mechanizmusokat haszná-

[1]Természetesen továbbra is a központilag bonyolított: középiskolai és felsőoktatási felvételi mechanizmusokra gondolunk.

nak (Abdulkadiroğlu, Pathak, és Roth, 2005; Braun, Dwenger, és Kübler, 2007; Romero-Medina, 1998; Balinski és Sönmez, 1999; Teo, Sethuraman, és Tan, 2001), Magyarországon pedig sikerült a többség által legjobbnak tartott algoritmust, vagy azzal ekvivalenst *kétszer* is újra felfedezni.

A különbség már a törvényi megközelítésben is látszik. A felsőoktatási felvételi kidolgozói egy „felhasználóbarát" felvételi rendszert vizionáltak, ahol a pontszáma alapján minden jelentkező azonnal el tudja dönteni, hova nyert felvételt. Ezt, illetve a pontszámítás módját (ami tulajdonképpen az iskolák preferenciáit határozza meg) rögzítették, míg a párosító, itt besorolásinak nevezett algoritmus megtervezését a végrehajtó hivatalra bízták. Bizonyos kézenfekvő optimálási feltételek mellett az eredmény szükségszerűen a már említett párosítás, de a gyakorlatban felmerülnek bizonyos speciális problémák, melyek mellett a ponthatárok megadása korántsem triviális.

Úgy tűnik, a középiskolai felvételi esetében a reform végrehajtói nagy magabiztossággal oldották meg az alapproblémát, azaz a jelentkező tanulók iskolákhoz való rendelését. Sajnos az algoritmus törvénybe foglalásánál már kevésbé voltak sikeresek, mivel – akár így történt, akár nem, – a jogszabályi szövegből alig lehet felismerni a jelenleg alkalmazott algoritmust, sőt, a leírás valamivel jobban illik a bostoni algoritmusra. Szerencsés volna feloldani ezt az ellentétet, de ehhez jobban meg kell értenünk a szóban forgó algoritmusok tulajdonságait. Ez indokolja a dolgozatban a legújabb, a jóléti megközelítést bevezető eredmények ismertetését, melyek kicsit árnyaltabbá teszik a Gale-Shapley és a bostoni algoritmusok közötti kapcsolatot – tulajdonképpen nehezebbé téve a választást.

Ezen eredmények tükrében úgy véljük, hogy a magyarországi felvételik esetében olyan speciális preferenciákkal van dolgunk, amikor a Gale-Shapley algoritmus Pareto-optimalitása nem garantált. Sajnos feltevés igazolásához szükséges adatok a tanulmány írásakor még nem érkeztek meg, reméljük a jövőben számszerűen is igazolhatjuk hipotézisünket, azonban ez már egy külön tanulmány témája lesz.

# Irodalomjegyzék


ABDULKADIROĞLU, A., Y.-K. CHE, ÉS Y. YASUDA (2008): „Expanding Choice' in School Choice," Research Paper 20, Economic Research Initiatives at Duke (ERID), Durham, NC.

——— (2009): „Resolving Conflicting Preferences in School Choice: The 'Boston' Mechanism Reconsidered," Working paper, Duke University.

ABDULKADIROĞLU, A., P. A. PATHAK, ÉS A. E. ROTH (2005): „The New York City High School Match," *American Economic Review*, 95(2), 364–367.

ABDULKADIROĞLU, A., P. A. PATHAK, ÉS A. E. ROTH (2009): „Strategy-proofness versus Efficiency in Matching with Indifferences: Redesigning the NYC High School Match," *American Economic Review*, 99(5), 1954–78.

ABDULKADIROĞLU, A., P. A. PATHAK, A. E. ROTH, ÉS T. SÖNMEZ (2005): „The Boston Public School Match," *American Economic Review*, 95(2), 368–371.

ABDULKADIROĞLU, A., P. A. PATHAK, A. E. ROTH, ÉS T. SÖNMEZ (2006): „Changing the Boston School Choice Mechanism," Boston College Working Papers in Economics 639, Boston College Department of Economics.

ABDULKADIROĞLU, A., ÉS T. SÖNMEZ (2003): „School Choice: A Mechanism Design Approach," *American Economic Review*, 93(3), 729–747.

ALCALDE, J. (1996): „Implementation of Stable Solutions to Marriage Problems," *Journal of Economic Theory*, 69(1), 240 – 254.

BALINSKI, M., ÉS T. SÖNMEZ (1999): „A Tale of Two Mechanisms: Student Placement," *Journal of Economic Theory*, 84(1), 73–94.

BOGOMOLNAIA, A., ÉS H. MOULIN (2001): „A New Solution to the Random Assignment Problem," *Journal of Economic Theory*, 100, 295–328.

BRAUN, S., N. DWENGER, ÉS D. KÜBLER (2007): „Telling the Truth May Not Pay Off: An Empirical Study of Centralised University Admissions in Germany," IZA Discussion Papers 3261, Institute for the Study of Labor (IZA).

CHE, Y.-K., ÉS F. KOJIMA (2008): „Asymptotic Equivalence of Probabilistic Serial and Random Priority Mechanisms," Cowles Foundation Discussion Papers 1677, Cowles Foundation, Yale University, New Haven.

CHEN, Y., ÉS T. SÖNMEZ (2006): „School choice: An experimental study," *Journal of Economic Theory*, 127(1), 202–231.

DUBINS, L. E., ÉS D. A. FREEDMAN (1981): „Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm," *American Mathematical Monthly*, 88(7), 485–494.

ERDIL, A., ÉS H. ERGIN (2008): „What's the Matter with Tie-Breaking? Improving Efficiency in School Choice," *American Economic Review*, 98(3), 669–689.

ERGIN, H., ÉS T. SÖNMEZ (2006): „Games of school choice under the Boston mechanism," *Journal of Public Economics*, 90(1–2), 215–237.

GALE, D., ÉS L. SHAPLEY (1962): „College admissions and the stability of marriage," *American Mathematical Monthly*, 69, 9–15.

GLAZERMAN, S., ÉS R. H. MEYER (1994): „Public School Choice in Minneapolis," in *Midwest approaches to school reform*, ed. by T. A. Downes, és W. A. Testa, pp. 110–126. Federal Reserve Bank of Chicago.

HAERINGER, G., ÉS F. KLIJN (2009): „Constrained School Choice," *Journal of Economic Theory*, 144(5), 1921–1947.

KNUTH, D. E. (1976): *Marriages Stables*. Les Presses de l'Université de Montreal, Montréal.

KÓCZY, L. Á. (2008): „A stabil párosítások szakirodalmának, ezen belül a felvételi rendszerek elemzéséhez kapcsolódó eredmények összefoglalása és ismertetése," „A közoktatás teljesítményének mérése-értékelése, az iskolák elszámoltathatósága" programjának 1401. számú produktuma, Magyar Tudományos Akadémia, Közgazdaságtudományi Intézet, Budapest.

KÓCZY, L. Á. (2009a): „A magyarországi – elsősorban a közép- és felsőoktatási – felvételi folyamat nemzetközi összehasonlítása, matematikai modellezése, algoritmizálása; az algoritmusok tulajdonságainak, esetleges hiányosságainak feltárása," „A közoktatás teljesítményének mérése-értékelése, az iskolák elszámoltathatósága" programjának 1402. számú produktuma, Magyar Tudományos Akadémia, Közgazdaságtudományi Intézet, Budapest.

KÓCZY, L. Á. (2009b): „A törvényhozó és a felvételi folyamat tervezői szándékának, szempontjainak megismerése, a szempontok matematikai tulajdonságok formájában való megfogalmazása," „A közoktatás teljesítményének mérése-értékelése, az iskolák elszámoltathatósága" programjának 1403. számú produktuma, Magyar Tudományos Akadémia, Közgazdaságtudományi Intézet, Budapest.

ROMERO-MEDINA, A. (1998): „Implementation of stable solutions in a restricted matching market," *Review of Economic Design*, 3(2), 137–147.

ROTH, A. E. (1984): „The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory," *Journal of Political Economy*, 92(6), 991–1016.

——— (1985): „The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem," *Journal of Economic Theory*, 36(2), 277–288.

——— (1986): „On the Non-transferable Utility Value," *Econometrica*, 54(4), 981–984.

——— (2008): „Deferred acceptance algorithms: history, theory, practice, and open questions," *International Journal of Game Theory*, 36(3–4), 537–569.

TEO, C.-P., J. SETHURAMAN, ÉS W.-P. TAN (2001): „Gale-Shapley Stable Marriage Problem Revisited: Strategic Issues and Applications," *Management Science*, 47(9), 1252–1267.

# A. Függelék

# Algoritmusok

## A.1. A NIMP algoritmus

Az alábbiakban Roth (1984) alapján bemutatjuk a NIMP algoritmust.

Minden kórház rangsorolja a jelentkezőket (X-szel megjelölve a nem elfogadhatókat), és minden hallgató rangsorolja a kórházakat, melyekhez jelentkezett (hasonlóan megjelölve az érdekteleneket). Az így elkészített lapokat kell a központba eljuttatni, ahol első körben a kórházi rangsorokat megtisztítják a kórházat elfogadhatatlanként megjelölő hallgatóktól és ugyanígy a hallgatók rangsorát az őket elfogadhatatlanként megjelölő kórházakétól. A szerkesztett listák tehát elfogadható alternatívákat rangsorolnak.

Ezeket a listákat egy feldolgozó algoritmusba táplálják, mely egyrészt egy párosító fázisból, majd egy próbapárosítás-és-javítás fázisból áll. A párosító fázis első lépése (az 1/1. lépés) az vizsgálja, hogy akadnak-e olyan kórházak és hallgatók, melyek egymás rangsorában első helyen szerepelnek. (Ha egy $H_i$ kórház kvótája $q_i$, akkor mindez a $q_i$ első helyen rangsorolt hallgatóra vonatkozik.). Ha nincs ilyen találat, akkor az algoritmus rátér a 2/1. lépésre. Itt a hallgatók listáján második helyen szereplő kórházakat viszonyítjuk a kórházak listáján első helyen szereplő nevekkel. Ha nincsenek találatok, az algoritmus továbblép. Általában a $k$/1. lépésben a párosító fázis során olyan hallgató-kórház párokat keresnek, hogy a kórház a hallgatót az első helyre sorolja, a kórház pedig $k$-adik helyen szerepel a hallgatók rangsorában. Ha valamely $k$-ra van találat, akkor rátér a második fázisra.

Itt a talált párt ideiglenesen összepárosítják, azaz a hallgatót, akit az általa $k$-adik helyen megjelölt körház első helyen rangsorol, ehhez a kórházhoz rendeljük. Ekkor a hallgatók és á kórházak rangsorait a következő módon módosítjuk: Minden kórház, melyet az $s_j$ hallgató hátrébb rangsorol, mint jelenlegi, ideiglenes párját, törlésre kerül (ha tehát most a $k$-adik preferenciájához került, akkor csak az első $k$ tagot tartjuk meg. Egyúttal $s_j$-t töröljük minden, $s_j$ listájáról törölt kórház listájáról (tehát ezen a listán már csak olyan hallgatók maradnak, akik még nem kerültek egy preferált kórházhoz. Vegyük észre, hogy ha egy kórház preferált hallgatóját töröljük a rangsorából, azzal a többi hallgató eggyel előrébb lép, hiszen így ugyanazon kvóta mellett kevesebb hallgatót tartalmaz a rangsor. Miután a rangsorokat frissítettük az algoritmus visszatér az első fázisba, ami a frissített rangsorok mellett keres párokat. Bármilyen új párosítás felülírja az aktuális, ideiglenes párosításokat (Megjegyzendő, hogy az új párosítás csak javíthat a hallgató meglevő hozzárendelésén, hiszen a hátrébb rangsorolt kórházakat töröltük.). Az algoritmus véget ér, ha nem talál új ideiglenes találatokat, ekkor az ideiglenes párokat véglegesíti. A pár nélkül maradt hallgatók, vagy kórházi helyek nem kerülnek párosításra és közvetlenül próbálhatnak más párosítatlanul maradt hallgatókkal, illetve helyekkel egyezkedni.

## A.2. A columbusi algoritmus

A Columbus Cityben alkalmazott algoritmus a következő (Abdulkadiroğlu és Sönmez, 2003, alapján):

1. Minden jelentkező legfeljebb 3 iskolát jelölhet meg.
2. Bizonyos iskoláknál garantált helye van az iskola körzetében lakóknak. A fennmaradó helyekre a jelentkezők sorrendje véletlenszerű. A többi iskolánál az összes hely véletlen sorrend alapján kerül kiosztásra.
3. A (még) szabad helyeket a fenti preferenciák figyelembevételével ajánlják meg a jelentkezőknek. Az ajánlatra 3 napon belül kell válaszolni. Elfogadás esetén a jelentkező kikerül a rendszerből, az elfogadott ajánlat alapján kerül beiskolázásra. Ahogy egyes ajánlatok elutasításra kerülnek, ezeket a helyeket megajánlják az egyenlőre várólistás jelentkezőknek.

## A.3. A legjobb cserekörök módszere

1. Minden hallgató és iskola megnevezi mit/kit rangsorol az első helyre. Mivel a résztvevők száma véges létezik olyan $s_1, C_1, s_2, ..., C_k$ kör, hogy $s_i$ $C_it$-t preferálja, aki viszont $s_{i+1}$-t, továbbá $C_k$ $s_1$-t preferálja. Minden hallgató és minden iskola legfeljebb egy-egy körhöz tartozik. Minden olyan hallgatót, aki egy ilyen körhöz tartozik, felveszi az általa megnevezett iskola. Ezzel a hallgató kikerül a rendszerből, az iskolának pedig eggyel kevesebb szabad helye marad. Ha minden hely elfogyott, akkor az iskola is kikerül a rendszerből, így a továbbiakban a hallgatók már nem nevezhetik meg, mint kedvencüket.

2. Minden további lépésben a maradék hallgatók és a maradék iskolák vesznek részt, ettől eltekintve a lépés lefolyása ugyanaz, tehát a résztvevők megnevezik a preferenciájukat, majd a körökhöz tartozó hallgatókat az általuk megnevezett iskola veszi fel.

3. Az algoritmus akkor ér véget, ha a hallgatók elfogynak. Mivel minden lépésben legalább egy hallgató felvételt nyer, így a szükséges lépések száma nem több, mint a hallgatók száma.