MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI INTÉZET

AZ MTA-KTI
„A KÖZOKTATÁS TELJESÍTMÉNYÉNEK MÉRÉSE-ÉRTÉKELÉSE, AZ ISKOLÁK ELSZÁMOLTATHATÓSÁGA" PROGRAMJÁNAK

FERO
1402. SZÁMÚ PRODUKTUMA

A magyarországi – elsősorban a közép- és felsőoktatási – felvételi folyamat nemzetközi összehasonlítása, matematikai modellezése, algoritmizálása; az algoritmusok tulajdonságainak, esetleges hiányosságainak feltárása.

Kóczy Á. László[1]

2009. május 31.

[1]Budapesti Műszaki Főiskola, Keleti Károly Gazdasági Kar, 1084 Budapest, Tavaszmező 15-17. Email: koczy.laszlo@kgk.bmf.hu

Tartalomjegyzék

Kivonat

Ismertetjük a magyarországi középiskolai és felsőoktatási felvételi rendszerét a felvételeket meghatározó párosítási algoritmusokat és tulajdonságaikat.

A középiskolai felvételi rendszer a hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmus tiszta alkalmazása, míg a felsőoktatási felvételi lényege szintén ezen az algoritmuson alapszik, de az eredeti algoritmusnál közérthetőbb formában. A hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmus az egyik alapvető és sokat tanulmányozott párosítási mechanizmus, melyre mind a párosítások stabilitása, mind a hallgatók őszintesége teljesül. Ez a két tulajdonság csak igen jól működő mechanizmusokat jellemezhet. Ugyanakkor a felvételi lebonyolításában van néhány elem, melyek veszélyeztetik ezeket a jellemzőket: A többszintű keretszámok és a minimális induló létszámok eredményezhetnek párosításokat, amik nem stabilok, míg a gyakorlatilag korlátos számú lehetséges jelentkezés pedig a valós preferenciák őszinte feltárását ássa alá.

Kulcsszavak: felsőoktatási felvételi, középiskolai felvételi, késleltetett elfogadási algoritmus, legkisebb induló létszám, hierarchikus keretszámok, rugalmas jelentkezési korlátok

1. fejezet

Bevezetés

A párosítások irodalma alig pár évtizedes történelme alatt igen sikeres karriert futott be. A játékelmélet speciális alkalmazásaként indult, de rövidesen önállósította magát. Ebben kulcsfontosságú volt a felfedezés, hogy az Egyesült Államok központosított rezidensi felvételi rendszere ekvivalens a Gale és Shapley (1962) által megálmodott algoritmussal és sikere lényegében a kapott párosítás stabilitásának köszönhető. Mindig sokat jelent egy terület számára, ha az alkalmazhatókból végre alkalmazott eredmények lesznek.

A szakterület ma reneszánszát éli; a korszak a 80-as évek közepén kezdődött, amikorra az elméleti háttér eléggé megerősödött ahhoz, hogy a szakma kritikusan léphessen fel a gyakorlatban heurisztikusan tervezett algoritmusok kapcsán.(Abdulkadiroğlu és Sönmez, 2003; Abdulkadiroğlu, Pathak, és Roth, 2005; Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, és Sönmez, 2005; Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, és Sönmez, 2006; Ergin és Sönmez, 2006; Roth, 1984, 1986b; Roth és Peranson, 1997, 1999). Ez a fellépés váratlanul sikeres volt, s az illetékes szervek együttműködésének köszönhetően sikerült több jellemzően felvételi rendszert a résztvevők és a szakma megelégedésére megreformálni. Ezek a változások egytől egyig sikeresek voltak.

Míg a 90-es években a recept a Gale-Shapley algoritmus minél hűebb megvalósítása volt, az utóbbi években némileg árnyaltabb a kép és megnőtt az érdeklődés a még feltáratlan párosítási mechanizmusok, problémák iránt, mégpedig kettős céllal. Egyrészt a további alkalmazások, az esetleg sikeres javító változtatások tovább erősítik a terület pozícióit, mely mára a társadalmi döntések elméletének egyik legjelentősebb területévé nőtte ki magát, másrészt él a remény az esetlegesen teljesen más, alternatív algoritmusok felfedezésére, melyek egy másfajta átváltást kínálnak a párosítások tulajdonságai között.

Nos, a magyarországi felvételi rendszerek[1] se nem tartoznak a teljesen feltáratlanok közé (Biró, 2007, 2008; Bíró és Fleiner, 2008) se nem kínál igazán nagy meglepetéseket – hacsak nem meglepő az, hogy mind a közép-, mind a felsőoktatási felvételi algoritmus megfelel alapjaiban a szakma elvárásainak, míg az előbbi a Gale-Shapley algoritmus igen tiszta alkalmazása, utóbbi pedig egy rendkívül praktikus, közérthető algoritmus, ami ugyanakkor szintén a Gale-Shapley algoritmusra vezethető vissza. Kétségkívül meglepő és az érintettek hozzáértésére vall, hogy a párosításokat lebonyolító szervezetek a szakirodalomtól függetlenül dolgozták ki ezeket az eljárásokat, míg sok más országban évtizedek óta tudományos szempontból elfogadhatatlan algoritmusokat toldoznak-foldoznak (Braun, Dwenger, és Kübler, 2007; Teo, Sethuraman, és Tan, 2001).

Jelen tanulmány célja a magyarországi középiskolai és felsőoktatási felvételi rendszerek részletes és minél teljesebb körű elemzése a párosításelmélet tükrében. Mint már előrevetítettük, a

[1]Jelen dolgozat a középiskolai és a felsőoktatási felvételivel – azon belül az alapképzésekkel – foglalkozik, az általános iskolai felvételi alig szabályozott és decentralizált.

feltárt algoritmusok nem újak, ugyanakkor a felsőoktatási felvételi esetében részletesen elemezzük a felvételi eljárás néhány olyan elemét, melyek eddig elkerülték az elemzők figyelmét, holott alapjaiban módosíthatják a központi algoritmus karakterisztikáját.

Tanulmányunk 2x2 fő részből áll. Először részletesen bemutatjuk az algoritmusokat, lefordítva azokat a párosítások irodalmában használt matematikai terminológiára, majd a következő két részben rátérünk az algoritmusok tulajdonságainak elemzésére. Mivel könnyen igazolható a hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmussal, a tulajdonságokhoz elegendő fellapoznunk a szakirodalom szinte bármely opusát. Figyelmünket ezután a hazai sajátosságok felé fordítjuk. A felsőoktatási felvételi három eleme különösen érdekes: a több szinten megfogalmazott felvételi keretszámok, a legkisebb induló létszámok kikötése és végül, hogy monetáris ösztönzőkkel bírjuk rá a hallgatókat a preferencia lista tömörítésére.

A tanulmány szerkezete tehát a következő: Először bemutatjuk a szóban forgó algoritmusokat, majd rátérünk jellemzőikre. Ehhez egy rövid matematikai bevezetővel indítunk, majd a két algoritmus és felvételi rendszer elemzése következik, külön-külön összegezve a talált eredményeket.

2. fejezet

A magyarországi felvételi rendszerek bemutatása

A továbbiakban bemutatjuk a magyar oktatási rendszer különböző szintjein alkalmazott felvételi eljárásokat.

2.1. Középiskolai felvételi

A középfokú közoktatási intézményekbe (a továbbiakban egyszerűen középiskolák) való felvételit a Középfokú Közoktatási Intézmények Felvételi Információs Rendszere (KIFIR) bonyolítja. Az alábbiakban a KIFIR által alkalmazott párosító algoritmust ismertetjük.

2.1.1. A felvételi eljárás

A felvételi rendszert részleteit két jogszabály rögzíti:

- A 11/1994. számú (VI. 8.) Művelődési és Kulturális Minisztérium (MKM) rendelet 17/A. paragrafusa és 8. számú melléklete a középfokú iskolákba történő jelentkezés rendjét és a felvételi eljárás szabályait határozza meg, definiálva minden érintett jogkörét, feladatait és felelősségrendszerét;
- a 17/2008. (V. 9.) Oktatási és Kulturális Minisztérium (OKM) rendelet a 2008/2009. tanév rendjéről, amely 3. számú mellékletében megadja a felvételi eljárás aktuális tanévre szóló feladatainak és határidőinek ütemezését.

A hallgatók jelentkezését iskolájuk bonyolítja. A tulajdonképpeni jelentkezés egy *Tanulói Adatlap*ból és *Jelentkezési Lap*okból áll. A hallgató tetszőleges számú iskolát, illetve tagozatot megjelölhet – jelentkezési lapból középfokú iskolánként egyet-egyet kell kitölteni. Utóbbin a hallgató akár tíz különböző tanulmányi területet is felsorolhat.[1]

A középiskolák a Felvételi Központtól értesülnek a hallgató hallgatókról, a listát betűrend szerint rendezve kapják meg. Ugyanakkor a középiskola ahhoz az információhoz nincs hozzáférése, hogy a hallgatók hanyadikként jelölték meg a Tanulói Adatlapon.

A beérkezett jelentkezéseket a középiskolák előre meghirdetett, de intézményenként más-más módon (iskolai eredmények, központilag kiadott írásbeli, illetve az iskola által szervezett szóbeli vizsgák) rangsorolják. A rangsorolás eredményeképpen egy hallgató kaphat egy sorszámot, vagy elutasítást. Az elutasítás azt jelenti, hogy a hallgató nem teljesíti az iskola felvételi követelményeit és akkor sem kerül felvételre, ha adott esetben az iskola nem tudja feltölteni az

[1] A nyomtatványok elérhetők elektronikusan a Közoktatási Információs Iroda honlapjáról (www.kir.hu), a letöltések menüpont alatt.

adott képzési terület keretszámát.

A felvételi vizsgák tapasztalatai alapján a hallgató módosíthatja a Tanulói Adatlapot: módosíthatja a korábban megnevezett képzési területek sorrendjét, illetve új képzési területeket vehet fel a már korábban megjelölt középiskolák kínálatából. Fontos, hogy mivel további felvételi vizsgákra nem kerül sor, további képzési területeket csak az iskolával való előzetes egyeztetés alapján (jellemzően az iskola javaslatára) célszerű megjelölni, hiszen itt feltételezzük, hogy az iskola a rendelkezésre álló jegyek és felvételi vizsgaeredmények alapján képes a hallgatót rangsorolni.

A végleges preferenciasorrendek (mind a hallgatók, mind az iskolák részéről valók) alapján a hallgatóket a Felvételi Központ párosítja össze.

2.1.2. A párosítási algoritmus

Az algoritmus két táblázatból indul ki. Egyrészt minden egyes tagozathoz tartozik egy, a diákokra vonatkozó rangsor, mely a hallgatók sorszáma mellett azt is tartalmazza, hogy egy hallgató felvehető-e. Másrészt minden hallgatóhoz tartozik egy rangsor, mely viszont a tagozatokra vonatkozik.

Az algoritmus hitelessége szempontjából fontos hangsúlyozni, hogy a hallgatók név nélkül, csak azonosítóval szerepelnek a rangsorokban, tehát manipulációra nincs is igazán lehetőség.

Az algoritmus lényege a következő:

1. Az iskolák számára elfogadható jelentkezéseket élőnek, a nem elfogadhatókat nem élőnek jelöljük.

2. Minden hallgatót az általa legjobb helyre sorolt még élő tagozathoz rendeljük.

3. Az egyes tagozatokhoz rendelt hallgatóket sorba rendezzük. A felvehető keretszámon túli hallgatók jelentkezését nem élőre állítjuk.

4. Ha az ezáltal elutasított hallgatóknek van még élő jelentkezése, akkor visszatérünk a 2. lépésre.

Fontos megjegyeznünk, hogy amikor visszatérünk a 2. lépésre, az újonnan besorolt jelentkezők kiszoríthatnak korábban élő jelentkezéseket. Az így kiszorított tanulók a következő még élő jelentkezésük alapján kerülnek ismét hozzárendelésre.

Könnyű belátni, hogy a tagozatok egyre több és a rangsoraik alapján egyre jobb tanulóval kerülnek betöltésre így az algoritmus véges idő alatt véget ér. Ekkor a jelentkezések a következő három kategória valamelyikébe sorolandók:

- élő és besorolt – a tanulót erre a tagozatra vették fel
- élő és nem besorolt – a hallgatót egy általa preferált tagozatra vették fel
- nem élő.

Azok a hallgatók, akiknek csak nem élő jelentkezése maradt, nem nyertek felvételt egyik helyre sem.

2.2. Jelentkezés felsőoktatási intézményekbe

A felsőoktatási intézményekbe való jelentkezés és felvételi is központosított módon történik. A felvételi rendjét elsősorban a felsőoktatási intézmények felvételi eljárásairól szóló 237/2006. (XI.27.) Kormányrendelet szabályozza.

2.2.1. A felvételi eljárás menete

A felsőoktatási felvételi évente két alkalommal történik, de a jelentkezések döntő többsége az ősszel induló képzésekre vonatkozik február 15.-i benyújtási határidővel. A jelentkezést a diák kezdeményezi, aki írásban, vagy elektronikusan adhatja meg az intézményeket, ahova jelentkezni szeretne. A jelentkezés fontos eleme az intézmények rangsorolása; a rangsoron a felvételi döntés előtt, az érettségi eredménye, tehát a felvételi pontszám ismeretében még egyszer módosíthat.

A hallgatók alaphelyzetben 3 tagozatot jelölhetnek meg államilag finanszírozott és költségtérítéses formában is. Így a finanszírozási formát is figyelembe véve összesen 6 tagozat megjelölésére van lehetőség. Ha a hallgató ezen felül további tagozatokat is megjelölne, jelentkezésenként 2000-2000 Ft kiegészítő díjat kell fizetnie a 9000 Ft-os alapdíjon felül. Hátrányos és halmozottan hátrányos helyzetű hallgatók kedvezményt kapnak az alapdíjból, de a kiegészítő díjat nekik is fizetniük kell.

A középiskolai felvételihez hasonlóan a párosítás központilag történik. Hogy ez lehetséges legyen a fenti mellé szükséges tisztáznunk az iskolák preferenciáit, illetve a kapacitási korlátokat.

A középiskolai felvételihez hasonlóan a rangsor alapja a pontszámítás. A pontok számításának módját a 2.1. Táblázat foglalja össze vázlatosan. A szabályok némiképp különböznek szakonként, például más-más érettségi tárgyakat kell figyelembe venni, vagy például a nyelvszakok esetében a nyelvből tett emelt szintű érettségi alapkövetelmény, így többletpont sem jár érte, de a pontszámítás módját minden intézmény köteles előre publikálni a Felvételi Tájékoztatóban. Fontos még tisztáznunk, hogy a jelentkezéskor az érettségi eredménye még nem ismert, így a hallgatók úgy töltik ki a jelentkezési lapot, hogy csak bizonyos várakozásaik lehetnek a pontszámukat illetően.

Az egyes szakokra, tagozatokra felvehető hallgatók számát az előzetesen közzétett felvételi létszámok határozzák meg. Ugyanakkor szakonként, illetve szakcsoportonként országosan is léteznek létszámkorlátok, sőt a felvehető hallgatók listáját is szakokra, szakcsoportokra közösen, természetesen az intézményi kapacitási korlátokat figyelembe véve határozzák meg.

Míg bizonyos szakoknál a túljelentkezés jelent problémát, egy szak csak akkor lehet rentábilis, ha elegendő felvett hallgatóval tud indulni. Ennek megfelelően minimum létszámok is meghatározásra kerülnek, azaz egy szak csak akkor indul el, ha legalább a minimum induló létszámnak megfelelő számú hallgató nyert rá felvételt.

Külön érdekessége a rendszernek a két finanszírozási forma. A költségtérítéses hallgatók a képzésük költségének egy részét tulajdonképpen tandíjként be kell, hogy fizessék, míg az államilag finanszírozott hallgatók tandíjmentesek. Az a hallgató, aki egy szak hallgatásáért akár tandíjat is fizetne, természetesen tandíjmentesen is szívesen hallgatná. Ezt külön díj nélkül megjelölheti a jelentkezési lapon, hiszen a jelentkezések számának meghatározásakor a finanszírozási formák nem számítanak, ugyanakkor a sorrendben természetes, hogy esetenként ugyanaz a szak költségtérítéses és az államilag finanszírozott formában teljesen máshol szerepel a hallgató preferenciái között, ad abszurdum a költségtérítéses forma már nem elfogadható, így nem is kerül felsorolásra.[2] Ezekből nyilvánvaló, hogy ugyanarra a képzésre költségtérítéses formában könnyebb bekerülni, ugyanakkor a két finanszírozási forma ponthatára közötti különbséget a törvény 10%-ban maximálja.

Az ezeknek megfelelően összeállított jelentkezések és a vonalhúzó algoritmus alapján az Educatio Kht. javaslatot készít felvételi ponthatárokra. Aki nem éri el egy adott szak felvételi ponthatárát, nem nyert felvételt. Aki eléri, az igen, de minden hallgató csak egy helyre, az összes sikeres jelentkezése közül az általa legmagasabbra sorolt szakra nyer felvételt.

Bár a fenti alsó és felső korlátokat az intézmények jó előre közzéteszik, Az első körben (nem publikusan) meghatározott felvételi ponthatárok alapján a kapacitások még változhatnak, a cél az államilag támogatott tanulói helyek és az intézmények kapacitásának minél jobb kihasználása. A változtatást az – egyébként a minél nagyobb hallgatói létszámokban anyagilag is érdekelt – iskolák kezdeményezik, és e változtatások a párosítások újabb és újabb előállítását kívánják, de természetesen csak a végső ponthatár kerül kihirdetésre.

2.2.2. A vonalhúzó algoritmus

Adottnak tekintve a hallgatók és a szakok preferenciáit a felvételi ponthatárok meghatározása, azaz a párosítás a következőképpen történik:

1. Minden hallgató az általa első helyen megjelölt szakot választja.

2. Minden egyes szakhoz rendelünk egy ponthatárt. Ha a szakot a felvételi keretszámnál ke-

[2] A fordított helyzet inkább csak figyelmetlenségből fordul elő, hiszen az egyértelműen kedvezőbb finanszírozási forma feltüntetése – feltéve, hogy létezik az adott szakra – nem jár többletköltséggel.

vesebben választják, akkor a ponthatár a legalacsonyabb pontszámmal hallgató pontszáma. Ha a szakot választók száma meghaladja a keretszámot, azt a legalacsonyabb ponthatárt választják, melyre még igaz, hogy a ponthatár feletti jelentkezések a felvételi keretszámok alapján még mind felvehetők; minden más hallgató elutasításra kerül, a szóban forgó szakra való jelentkezésüket töröljük.

3. Ha az elutasított hallgatóknek van még további jelentkezése, akkor a preferált élő jelentkezést választják. Ha nincs további jelentkezésük, akkor az elutasított hallgatók nem nyernek felvételt, a felvételi ponthatárok pedig az utolsó értéken rögzülnek.[3]

Az algoritmus lényege, hogy a hallgatók a saját preferenciáikon zongoráznak végig.

A fenti algoritmus során lehetőség van magasabb szintű kvóták figyelembevételére is, ugyanakkor külön kell foglalkozni azokkal a szakokkal, ahol a felvettek száma nem éri el a minimális indítható létszámot. Nyilvánvaló, hogy nem szükséges azonnal minden ilyen szakot megszüntetni és a rá való jelentkezéseket érvényteleníteni, hiszen akár egyetlen ilyen szak törlésével is előfordulhat, hogy az ide hallgató hallgatók más nehezen induló szakra is jelentkeztek. Ennek kezelésére nincs kidolgozott algoritmus, ilyenkor a legrosszabb felvételi aránnyal (hallgatók száma osztva a legkisebb induló létszámmal) rendelkező szak kerül elsőként törlésre.[4]

[3]Előfordulhat, hogy egy szakra egyáltalán nem érkezik jelentkezés – itt a ponthatár tetszőlegesen választható meg.

[4]Forrás: Varjasy Gábor (Educatio Kht.) szóbeli közlése; az algoritmus részletes dokumentációja nem publikus.

2.3. Összegzés

A középiskolai felvételi alapja egy nagyon tiszta késleltetett elfogadási algoritmus. Mint ezt a következő fejezetben részletesen fogjuk tárgyalni, bár ez az algoritmus sem tökéletes, a szakmai közvélemény egyetért abban, hogy a iskolaválasztási párosítások esetén ez a legjobb választás.

A felsőoktatási felvételi magja ugyanez az eljárás, de egy jóval kevésbé tiszta formában. A vonalhúzásos algoritmus hazai specialitás, tulajdonságai kevésbé ismertek. Van továbbá pár olyan eleme a felvételinek, amik tovább árnyalják a az algoritmusról alkotható képet. Szemben például a középiskolai felvételivel a jelentkezők jellemzően kevés szakra adják be jelentkezésüket melynek oka az, hogy egy teljes rangsort megadni egy kisebbfajta vagyon. Egy hagyományos párosítási modellben az iskolák/szakok rendelkeznének csak felvételi korláttal. Ezzel szemben itt több szinten is meghatározásra kerültek felvételi keretszámok. Hasonlóan problematikus a legkisebb induló létszámok figyelembevétele. A hallgatók a pontszámítás után mind egy 480 pontnál nem nagyobb egész számot kapnak és eszerint kerülnek rangsorolásra. Világos, hogy egy-egy népszerűbb szak esetén óhatatlanul kialakul pontegyenlőség tovább bonyolítva az algoritmust. Ezeket mind-mind külön tárgyaljuk a következő fejezetben.

	kategória	pontszámítás módja	max
1.	**Érettségi pontok**		**200**
	érettségi eredménye alapján	2 érettségi tárgy százalékos eredménye	200
2.	**Tanulmányi pontok**		**200**
2a1	Év végi osztályzatok	5 tárgy utolsó két évi osztályzata összegének duplája:	100
		A magyar nyelv és irodalom	20
		Matematika	20
		Történelem	20
		Idegen nyelv	20
		Választható tárgy	20
2a2	Érettségi eredmény	százalékos eredmények átlaga	100
		— vagy —	
2b	Érettségi pontok	mint fent (tehát duplázva)	200
3.	**Többletpontok**		**80**
	Emelt szintű érettségiért	darabonként (max 2)	40
	C típusú nyelvvizsga	közép-, illetve felsőfok	35/50
	Versenyeredmények	versenytől, helyezéstől függően	20-80
	Előnyben részesítés	hátrányos helyzet	20-50
		fogyatékosság vagy GYES	50
	Összesen		**480**

2.1. táblázat. Pontszámítás a felsőoktatási felvételiben 2008-tól

3. fejezet

A magyarországi felvételi rendszerek tulajdonságai

Mielőtt rátérnénk a konkrét algoritmusok tulajdonságaira, bevezetjük és formalizáljuk a párosítások matematikai modelljeit. A párosítások elméleti hátterét egy korábbi dolgozatban (Kóczy, 2008) már feldolgoztuk, itt csak a legfontosabb definíciókra hagyatkozunk.

3.1. Fogalmak és jelölések

A párosítás résztvevői két diszjunkt halmazra oszthatók: iskolákra (*colleges*):

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$$

illetve hallgatókra (*students*):

$$\mathcal{S} = \{s_1, s_2, ..., s_m\}.$$

A párosítás alapvetően a másik halmaz résztvevőivel történik – ezt majd technikai okokból később egy kicsit módosítjuk. A felvételi lapon az intézmény megnevezése mellett szerepel a szak, a képzési és finanszírozási forma is, azaz egy jelentkezés például nem a Budapesti Műszaki Főiskolára, hanem a főiskola Keleti Károly Karának Gazdálkodási és menedzsment alapképzésének költségtérítéses nappali tagozatára történik. Mi a könnyebb nyelvezet kedvéért, követve az irodalmi hagyományokat, diákokról, hallgatókról illetve iskolákról, intézményekről fogunk beszélni, ahol az utóbbi valójában a középiskolai felvételi esetén iskola-tagozat párt. míg a felsőoktatási felvételiben egy intézmény-szak-tagozat-finanszírozási forma négyest takar.

Feltételezzük, hogy a hallgatók az iskolákat, az iskolák pedig a hallgatókat *rangsorolják*. Feltételezzük továbbá, hogy minden preferencia teljes és tranzitív.[1] Ebben az esetben a preferenciák kifejezhetők egy rangsorral (ahol esetleg megengedünk gyenge rendezést is), így egyszerű felsorolással írjuk le a preferenciákat. Ebben a felsorolásban rögtön elhagyhatunk minden elfogadhatatlan partnert ezzel is egyszerűsítve a jelölést. Így például $P(C_1) = s_1, s_2$, illetve $P(s_2) = C_3, C_1, C_2$. Konkrét összehasonlításban $C_i >_s C_j$, ha az s diák preferálja a C_i iskolát a C_j-vel szemben. Az s_i hallgató elfogadható a C iskola számára ha $s_i \geq_C C$ (ahol megengedtük az egyenlőséget, azaz indifferenciát is).

Egy sok-az-egyhez párosításban egy iskola több hallgatót is felvehet, ugyanakkor feltételezzük, hogy a C iskola legfeljebb q_C hallgatót vehet fel. q_C-t az iskola (felvételi) kvótájának nevezzük.

[1] Azaz feltételezzük, egyrészt, hogy bármely két (a későbbiekben: elfogadható) egyed (iskola, vagy diák) összehasonlítható és összehasonlításra is került, továbbá, hogy ha például egy hallgató az A és B iskolák közül A-t, a B és C közül B-t választja, akkor az A és C közül is A-t.

A következő definícióhoz szükségünk még egy fogalomra. Egy adott X halmaz elemeinek *rendezetlen családja* alatt X elemeinek olyan gyűjteményét értjük, ahol megengedjük az ismétlődést is.

3.1. Definíció (Párosítás). *A μ párosítás egy olyan függvény, mely a $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ halmaz elemeihez a $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ halmaz rendezetlen családjait rendeli, mégpedig úgy, hogy*

1. *$|\mu(s)| = 1$, és $\mu(s) = s$, vagy $\mu(s) \in \mathcal{C}$, azaz minden hallgatót pontosan egy iskolához, vagy önmagához rendeli*

2. *$|\mu(C)| = q_C$, azaz minden iskolához egy olyan családot rendelünk, melynek kardinalitása pontosan az iskola kvótájával egyezik. Megkötés továbbá, hogy ha a családnak r eleme hallgató ($|\mu(C) \cap \mathcal{S}| = r$), akkor a maradék $q_C - r$ helyet önmagával, C-vel tölti fel.*

3. *Akkor, és csak akkor $\mu(s) = C$, ha s a $\mu(C)$ családba tartozik, azaz a párosítás kölcsönös.*

A párosításokat grafikusan is ábrázolhatjuk:

$$m_1 = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & s_3 \\ s_1\ s_2\ C_1\ C_1 & s_4 & s_3 \end{array}$$

A fenti párosítás azt jelenti, hogy $q^{C_1} = 4$, ebből 2 helyet töltött fel hallgatókkal, C_2 csak egy hellyel rendelkezett, de ezt sikeresen fel is töltötte, míg s_3 felvételije sikertelen volt.

3.1.1. Preferenciák

Az egy-az-egyhez párosítási modellben a párosítások közti preferenciák kérdésén hamar áteshetünk: minden résztvevő a hozzárendelt párja alapján rangsorolja a párosításokat. Tehát ha

$\mu_1(x) >_x \mu_2(x)$, akkor (és csak akkor) $\mu_1 >_x \mu_2$ (ahol $x \in \mathcal{S} \cup \mathcal{C}$). Ez a gondolatmenet tökéletesen illik itt is, a diákokra, azonban az iskolákat itt nem diákokkal, hanem diákok csoportjaival párosítjuk, így mindenek előtt azt kell tisztázni, hogy az iskolák hogy rangsorolják ezeket a hallgatói csoportokat.

A C iskola csoportokra vonatkozó preferenciáit $P^{\#}(C)$-vel jelöljük. Elvben $P^{\#}(C)$ bármi lehet, ugyanakkor vannak olyan tulajdonságok, melyeket joggal feltételezhetünk. Így logikus, hogy ha a hallgatók egy adott halmazában valamely hallgatót, egy, az iskola által felállított hallgatói rangsorban előrébb szereplő hallgatóra cserélünk, míg a többit változatlanul hagyjuk, akkor az iskola a kapott halmazt preferálja. Általánosan a feltételt a következőképpen definiáljuk:

3.2. Definíció. *A hallgatók részhalmazain értelmezett $P^{\#}(C)$ reláció fogékony (az egyéni hallgatókra definiált $P(C)$ preferenciákra), ha*

$$\mu(C) \cup \{s'\} \setminus \{s\} >_C \mu(C) \Leftrightarrow s' >_C s,$$

ahol, értelemszerűen az első preferencia-reláció $P^{\#}(C)$-re, az utóbbi $P(C)$-re vonatkozik.

Bár a fogékonyság némileg korlátok közé szorítja a $P^{\#}(C)$ reláció lehetséges változatait, nem határozza meg például az iskola rangsorában első és negyedik, illetve második és harmadik helyen levő hallgatók által alkotott halmazok rangsorát. Fordítva viszont egyértelmű a kapcsolat: $P^{\#}(C)$ egyértelműen meghatározza a $P(C)$ preferencia-relációt (hiszen $P^{\#}(C)$-t definiáljuk az egy hallgatóból álló csoportokra is).

3.1.2. Stabilitás

Akár a házassági modellben, itt is feltételezzük, hogy a felvételhez a felek kölcsönös beleegyezése szükséges, így nem számíthatunk olyan párosításokra, ahol $\mu(s) = C$ és vagy az s hallgató elfogadhatatlan a C iskola, vagy a C iskola az s hallgató számára. Ellenkező esetben az elégedetlen résztvevő blokkolhatja a párosítást. Az ilyen blokkoktól mentes párosításokat *egyénileg racionálisnak* nevezzük.

Hasonlóan, a C iskola és az s hallgató együttesen blokkolhatja az adott μ párosítást, ha $\mu(s) \neq C$ és mindkettő preferálja a másikat (az egyik) jelenlegi párjával szemben, azaz $C >_s \mu(s)$ és létezik olyan $\sigma \in \mu(C)$, melyre $s >_C \sigma$; itt σ lehet hallgató, vagy maga C, azaz egy üres hely.

3.3. Definíció (Stabil párosítás). *Egy párosítás stabil, ha egyénileg racionális és semelyik hallgató-iskola páros nem blokkolja.*

Elvileg ez a fajta stabilitás a történetnek csak része, de hamarosan igazoljuk, hogy a több hallgatóból és esetleg több iskolából álló koalíciók blokkjaira is kiterjesztett stabilitás a fentivel egybeesik.

Azt mondjuk tehát, hogy egy μ párosítás *csoportosan instabil*, avagy egy *koalíció blokkolja*, ha létezik egy A koalíció, és egy μ' párosítás, hogy minden egyes $s \in A$ hallgatóra és minden egyes $C \in A$ iskolára

- $\mu'(s) \in A$, tehát az érintett hallgatók az érintett iskolák valamelyikével lesznek összepárosítva,

- $\mu'(s) >_s \mu(s)$, tehát az új párosítást preferálják,
- ha $\sigma \in \mu'(C)$, akkor $\sigma \in A \cup \mu(C)$, tehát C új hallgatókat csak A-ból meríthet
- $\mu'(C) >_C \mu(C)$, tehát az érintett iskolák is az új párosítást preferálják.

Összegezve: Minden, a változásban érintett hallgató és iskola az új párosítást preferálja.

3.4. Definíció. *Egy párosítás* csoportosan stabil*, ha nem blokkolja semmilyen koalíció.*

3.5. Tétel. *Egy párosítás pontosan akkor stabil, ha csoportosan stabil.*

3.1.3. Őszinteség/taktikázás

Egy párosítási mechanizmus a megadott preferenciák alapján készíti el a párosítást. Ugyanakkor a megadott és a valós preferenciák nem feltétlen egyeznek. Példaként felhozhatjuk a híres-hírhedt bostoni algoritmust (Alcalde, 1996; Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, és Sönmez, 2005; Kóczy, 2008), ahol a jobb iskolákban gyakorlatilag csak az elsőhelyes jelentkezéseknek van esélye, vagy a például Németországban használt prioritás-alapú párosítási mechanizmust (Braun, Dwenger, és Kübler, 2007). Bár Bostonban a hallgatók rangsora nem tanulmányi eredmények függvénye, hanem bizonyos körülményeké (ilyen például az iskola közelsége, illetve hogy a hallgatónek jár-e testvére az iskolába), ha például egy hallgatóre kedvenc iskolájában egyik feltétel sem teljesül, aligha célszerű az iskolát első helyen (vagy bárhol) megjelölni, hiszen jelentkezése nagy valószínűséggel sikertelen lesz, és ezzel jó eséllyel sehova nem nyer felvételt (és így majd a betöltetlen helyek közül választhat). Egy ilyen helyzetben a megadott rangsorok alapvetően eltérhetnek a jeletkezők valós preferenciáitól.

Ha vizsgálatunkat kiterjesztve a hallgatók taktikai megfontolásaira is egy kétlépcsős játékot kell elképzelnünk: első lépésként a hallgatók, illetve az iskolák választanak egy preferencia-sorrendet, majd az algoritmus ezen deklarált preferenciasorok alapján határozza meg a párosítást. A párosítási probléma megoldásakor visszafelé érvelünk: ha adott a párosító algoritmus, bármely preferencia-profilra meghatározza a párosítást, a párosításokra vonatkozó preferenciák alapján meghatározhatjuk, hogy egy hallgató a többiek adott preferencia-profiljára milyen legjobb-választ adhat. Az egészet egy nonkooperatív játékként értelmezve, a játék Nash-egyensúlyait keressük.

3.2. Középiskolai felvételi

3.2.1. Stabilitás

A középiskolai felvételi központi párosítási algoritmusa szinte egy az egyben követi a Gale-Shapley algoritmust (Gale és Shapley, 1962), illetve annak közvetlen általánosítása a sok-az-egyhez párosításokra.

A Gale-Shapley algoritmus a párosítások elméletének mondhatni kiindulópontja. Ezzel az algoritmussal igazolták a stabil párosítások létezését. Mivel a stabilitás a párosítások egyik központi kérdése minden további párosítási algoritmus vizsgálata esetén az első kérdés, hogy stabil párosítást eredményez-e, azaz tudja-e azt, amit a Gale-Shapley algoritmus.

Egy algoritmus természetesen lehet tökéletes matematikai értelemben, ugyanakkor ha a gyakorlatban nehezen használható, nem sokat ér. Nagy jelentőséggel bír tehát, hogy az Egyesült

Államokban használt országos rezidens párosítási algoritmus (National Resident Matching Program Roth, 1984) bár nem azonos a Gale-Shapley algoritmussal, ugyanazt a stabil párosítást eredményezi. Az NRMP a rezidensi munkapiac 1940-es években tapasztalt összeomlására adott válaszként az 1951-52-es évben került beavatkozásra és azonnali sikert hozott. Bár az algoritmuson az 1990-es években kisebb módosításokat hajtottak végre, a mai napig lényegében eredeti formájában látja el feladatát. Mindez a kapott párosítás kedvező tulajdonságainak köszönhető. Az NRMP kialakulásának körülményeit és a kapott párosítás tulajdonságait egy korábbi tanulmányban (Kóczy, 2008) részletesen tárgyaljuk. Itt csak a főbb tulajdonságokat emeljük ki.

3.6. Tétel. *A Gale-Shapley algoritmus által előállított párosítás stabil.*

3.7. Következmény. *A KIFIR algoritmus által előállított párosítás stabil.*

A KIFIR algoritmus a középiskolai párosítást végzi, ez a következmény tehát azt mondja ki, hogy nincs olyan (C, s) iskola-diák páros, hogy mind az s hallgató szívesebben tanulna a C iskolában, mint abban, ahova az algoritmus alapján felvették, ugyanakkor C is szívesen lecserélné valamelyik diákját s-re.

Általában egynél több stabil párosítás is létezik. Gale és Shapley (1962) megfigyelték, hogy ha a házassági modellben felcseréljük a nemek szerepét, és a nők válnak kezdeményezővé, a kapott párosítás minden nő számára (gyengén) kedvezőbb. Hasonlóképpen a sok-az-egyhez párosítások esetén is fontos, hogy ki a kezdeményező fél. Az Egyesült Államok Rezidens Párosító Programjában kezdetben a kórházak, majd az 1990-es évek reformja után a hallgatók váltak kezdeményezővé. A változás egyik oka pontosan az volt, hogy ez a hallgatók számára kedvezőbb párosítást eredményez, bár a párosítás az esetek kevesebb, mint 1 ezrelékében változott (Roth és Peranson, 1997, 1999).

A KIFIR algoritmus esetében a diákok preferenciáján megyünk végig, tehát a diákok a kezdeményezők.

3.8. Tétel. *A KIFIR felvételi algoritmus a hallgatók számára optimális stabil párosítást eredményezi.*

Komoly probléma egyes kisebb, gyakran vidéki iskolákban, hogy nem mindig tudják feltölteni a keretszámot és a felvett diákok képességei is elmaradnak más iskoláktól, ahol esetleg többszörös túljelentkezés van. Jogosan felmerül a kérdés, hogy mennyiben lehet ezért e konkrét algoritmust felelőssé tenni. Vajon egy az iskola-optimális stabil párosítást eredményező, vagy valamely más algoritmus megmentené ezeket az iskolákat?

3.9. Tétel. *(Roth, 1984) Az felvett hallgatók és a betöltött férőhelyek minden stabil párosítás esetén ugyanazok.*

Tehát, ha fontosnak érezzük, hogy a párosítás stabil legyen, a betöltetlen helyen nem változnak. A következő tétel pedig a probléma második felére ad választ.

3.10. Tétel. *(Roth, 1986a) Az az intézmény valamely stabil párosítás esetén nem tudja minden üresedését feltölteni, ahhoz minden stabil párosítás pontosan ugyanezeket a hallgatóket fogja hozzárendelni.*

3.2.2. Őszinteség

A stabilitás önmagában csak azt szavatolja, hogy a megadott preferenciák szerint nincs blokkoló koalíció, illetve pár. Ha a megadott preferenciák nem egyeznek a valódiakkal, a megadott preferenciák alapján vajmi keveset mondhatunk a párosítás stabilitásáról.

Általánosságban a következő tétel mondható ki:

3.11. Tétel. *(Roth, 1985) Nincs olyan stabil párosítás melyben minden intézmény számára domináns stratégia a valós preferenciáik felfedése.*

Bár ez az eredmény nem túl jó hír és a jelentőségét sem szabad alábecsülni a NRMP esetében, ahol egy-egy kórház pár hallgatót vesz fel, a középiskolai felvételi esetében a párosításoknak egy speciális esetéről van szó – tulajdonképpen iskolaválasztási problémáról. A különbség az iskolák viselkedésében rejlik: itt az iskolák nem, vagy csak igen korlátozott mértékben módosíthatják valós preferenciáikat, hiszen a sorrendet publikus elvek és – legalábbis az érintettek számára – ismert bemeneti adatok alapján határozzák meg: a felvételin elért illetve a részben hozott pontok alakítják ki a végső eredményt mely alapján a rangsorolás történik. Feltételezhetjük tehát, hogy az iskolák nem taktikáznak, illetve nem is tudnak taktikázni. Így igazából az a kérdés, hogy a hallgatóknek mennyire áll érdekében a valós preferenciáik felfedése. A következő tétel egy pozitív eredmény:

3.12. Tétel. *(Roth, 1986a) A hallgató-optimális stabil párosítás esetén a hallgatók számára domináns stratégia preferenciáik felfedése.*

Azaz, ha a párosítás hallgató optimális, akkor sem a hallgatók, sem az iskolák nem taktikáznak, így a fent vizsgált stabilitás valóban stabilitást, ami garantálja a felvételi rendszer sikerét.

3.2.3. Összefoglalás

Összességében elmondhatjuk, hogy a KIFIR algoritmus Gale-Shapley algoritmus tiszta és közvetlen alkalmazása ennek minden előnyével együtt garantálva a stabilitást és a gyakran nem kis frusztrációt okozó taktikázástól való mentességet. Az a tény, hogy az algoritmus a párosítási irodalomtól függetlenül került kifejlesztésre egyrészt dicséri a KIFIR párosítási algoritmus fejlesztőinek hozzáértését, illetve ismét jelzi, hogy a Gale-Shapley algoritmus milyen természetes és kézenfekvő.

Bár ezek az eredmények, illetve tulajdonságok fontosak, érdekes lenne megvizsgálni, hogy mennyiben felelnek meg, vagy egyáltalán hogy viszonyulnak a törvényhozó eredeti céljainak. Erre terjedelmi korlátok miatt csak egy külön dolgozatban lesz lehetőség.

3.3. Felsőoktatási felvételi

Mint az előző fejezetben részletesen bemutattuk, a felsőoktatási felvételi alapja a „vonalhúzás,” melyet néhány további elem, nevezetesen a többszörös kvóták, a minimális induló létszámok, a pontegyenlőség miatti gyenge rendezés és a jelentkezések számára vonatkozó puha korlátok tesznek színesebbé. A továbbiakban bemutatjuk, hogy a ponthúzó algoritmus ekvivalens egy hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmussal, majd megvizsgáljuk a különböző módosítások hatását erre az algoritmusra.

3.3.1. A vonalhúzó algoritmus stabilitása

Első lépésként igazoljuk, hogy a vonalhúzásos párosítás ekvivalens a hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmus eredményével. Az eredményhez eltekintünk a magyar felvételi rendszer előbb említett furcsaságaitól.

Feltételezzük tehát, hogy a hallgatók az összes intézményt rangsorolják, a hallgatók között semelyik kettőnek nem egyezik a pontszáma. Nincsenek minimum létszámok és csak iskolánként egy kvóta, azaz keretszám korlátozza a felvehető hallgatók számát. Az ilyen helyzetet a továbbiakban *idealizáltnak* nevezzük.

3.13. Tétel. *A vonalhúzásos párosítás pontosan a hallgató-optimális stabil párosítás.*

A bizonyítás két lépésből áll. Először igazoljuk, hogy a párosítás stabil, majd igazoljuk, hogy hallgató-optimális. Jelölje a párosítást μ!

A stabilitás bizonyítása indirekt. Tegyük fel, hogy létezik egy s hallgató, akit a C iskolához rendelt az algoritmus, ugyanakkor s a C' iskolával blokkolhatja a párosítást. A blokkolás feltétele, hogy mindkét fél érdekelt, tehát egyrészt $C' >_s C$, másrészt létezik olyan $x \in \mu(C')$, hogy $s >_{C'} x$. Ha $x \neq C'$ ez azt jelenti, hogy legalább egy, az s-nél alacsonyabb pontszámú hallgató is felvételre került, tehát s – pontszáma alapján – felvehető C'-be.

Ugyanakkor ha $x = C'$, azaz C' az s hallgatót az egyik üresen maradt helyre szeretné felvenni, az azt jelenti, hogy s még elfogadható számára. Viszont ha amúgy nem kerül betöltésre minden hely, akkor minden elfogadható hallgató felvételt nyer, azaz pontosan azok a hallgatók elfogadhatók, akiknek a pontszáma eléri a ponthatárt. Ha s elfogadható, akkor pontszáma eléri, tehát ismét azt kapjuk, hogy felvehető. Ezzel minden esetet diszkutáltunk.

Ezután vegyük észre, hogy definícióból adódóan, ha s felvételt nyert C'-be is, és C-hez képest preferálja, akkor a párosítás a C' iskolához, nem pedig a C-hez rendeli. Ellentmondás, tehát nincs blokkoló pár, vagyis a párosítás stabil.

Az, hogy a párosítás hallgató-optimális egyenes következménye annak, hogy a hallgatók veszik sorba a preferenciáikat. Így ha a párosítás lehetséges a hallgatók preferencialistáján előkelőbb helyen szereplő szakokkal is, akkor nem is keresünk egy ennél esetleg kedvezőtlenebb párosítást. Hogy ez világosabb legyen, vegyük a következő példát:

1. Példa. *Vegyünk egy egyszerű példát két iskolával és két hallgatóval. Az iskolák felvételi kapacitása 1-1 fő. A preferenciák az alábbiak:*

$$\begin{aligned} p(s_1) &= C_1, C_2 \\ p(s_2) &= C_2, C_1 \\ p(C_1) &= s_2, s_1 \\ p(C_2) &= s_1, s_2 \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az iskolák preferencia-sorrendje mögött az alábbi elért pontok állnak:

	C_1	C_2
s_1	*400*	*450*
s_2	*450*	*400*

A vonalhúzásos algoritmus a ponthatárt mindkét iskola esetében 400 pontban határozza meg, így s_1 a C_1 iskolába, míg s_2 a C_2 iskolába nyer felvételt. Ennek jelentősége azért nagy, ugyanis létezik egy másik stabil párosítás is, ahol az – ismét azonos – ponthatárok 450 pontnál kerülnek meghatározásra és s_1 a C_2 iskolába, míg s_2 a C_1 iskolába nyer felvételt. Utóbbi párosítás is stabil, azonban ez a hallgatók számára a lehető legrosszabb (egyúttal az iskolák számára a legjobb) stabil párosítás. Az intézmény-optimális párosítás az alábbi algoritmussal érhető el.

1. Első körben az iskolák egymástól függetlenül választják ki azt a legalacsonyabb ponthatárt, mellyel a hallgatók még nem lépik túl a felvehető létszámot.

2. Ha egy hallgató egynél több helyen is bekerült a felvehető hallgatók közé, csak a preferált jelentkezését tartja meg, a többit érvényteleníti.

3. Az iskolák lehetőség szerint tovább csökkentik a ponthatárokat, hogy a megüresedő helyeket új hallgatókkal töltsék fel.

4. Ha sikeres a csökkentés, vissza a 2. lépésre, ha a ponthatárok nem változtak: stop.

Az algoritmusnak fontos eleme, hogy az intézmények egymástól függetlenül változtatják a ponthatárokat mindig a legjobb hallgatókat kiválasztva. Érthető tehát, hogy az algoritmus valóban az *iskolák* szempontjából optimális ponthatárokat adja.

A fenti példában is láthattuk, hogy a vonalhúzási algoritmus által generált ponthatárok alacsonyabbak az intézmény-optimális algoritmus által megadottaknál. Ez a tulajdonság általánosan is igaz:

A tételt az egy-az-egyhez párosításokra igazolta Gale és Shapley (1962), de mivel minden fogékony preferenciákkal rendelkező sok-az-egyhez párosítási probléma is felírható egy-az-egyhez problémaként is, a tétel rögtön kiterjeszthető a felvételi párosítás problémájára is.[2]

[2]A tétel részletesebb bemutatását itt mellőzzük, lásd Kóczy (2008).

3.14. Tétel. *(Gale és Shapley, 1962) Minden* (M, W, P) *társkereső piacra létezik* M*-optimális és* W*-optimális párosítás is és ezek pontosan a késleltetett elfogadási algoritmus által leányvásár, illetve legényvásár esetén meghatározott* μ_M*, illetve* μ_W *stabil párosítások.*

3.15. Következmény. *(Biró, 2007, 2008) Jelölje* $l_{\mathcal{S}}$*, illetve* $l_{\mathcal{C}}$ *a hallgató- illetve az intézmény-optimális vonalhúzási algoritmus által meghatározott ponthatárokat* ($l_{\mathcal{S}}, l_{\mathcal{C}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{C}}$)*. Legyen továbbá* $l \in \mathbb{N}^{\mathcal{C}}$ *egy harmadik ponthatár-vektor, mely stabil párosítást eredményez. Ekkor*

$$l_{\mathcal{S}} \leq l \leq l_{\mathcal{C}}.$$

Bár a vonalhúzó algoritmus némileg eltér a szokásos megfogalmazástól a 3.13 tételből következik az alábbi folyomány.

3.16. Következmény. *A vonalhúzásos párosítás pontosan a hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmus által generált párosítás.*

Ez a folyomány ismét ablakot nyit a szakirodalom által legtöbbet tárgyalt algoritmusnak irodalmához; az előző alfejezetben kimondott tételek itt is érvényesek. Ismét elmondhatjuk, hogy a vonalhúzó algoritmus a lehető legszerencsésebb választás a felvételi lebonyolításához.

Sajnos itt az algoritmus kevésbé tiszta formájáról van szó és mint tudjuk néha apró változtatásoknak köszönhetően az algoritmus tulajdonságai alapvetően megváltozhatnak.[3] A következő alfejezetben ezeket a hazai specialitásokat vizsgáljuk.

[3]Lásd felvételi a rezidens képzésre az Egyesült Királyságban. Bár a stabil párosítást eredményező NRMP volt a minta, „kisebb” változtatásoknak köszönhetően elvesztek annak kedvező tulajdonságai (Roth, 1991; Kagel és Roth, 2000).

3.3.2. Többszintű keretszámok

A legjobb párosító algoritmus is elrontható, ha a gyakorlati alkalmazásban, úgymond praktikus okokból sérülnek azok a ritkán kimondott feltételek, amiknek tulajdonképpen a jó tulajdonságok köszönhetők. Mint látni fogjuk ebben az esetben is igaz az, hogy a néhány hazai jellegzetesség szinte kivétel nélkül problematikus. Hogy ezek hogy lennének kiküszöbölhetők, vagy erre van-e egyáltalán esély, ezt jelen dolgozatban csak vázoljuk, külön tanulmányt szánunk a törvényhozó szándékainak és ennek gyakorlati megvalósításának összevetésére.

A felvételi rendszer 2007-es reformja óta a kvóták nemcsak intézményi szinten kerülnek meghatározásra, hanem szakonként országosan is. Tehát aki a Budapesti Műszaki Főiskola Gazdálkodási és Menedzsment alapszakára jelentkezik, az nem csak az ide jelentkezőkkel, hanem minden más főiskola és egyetem azonos nevű szakjára jelentkezővel is versenyez.

3.17. Definíció. *Az iskolák $\mathcal{C}$ halmazának minden P részhalmazára felvehető hallgatók számát, azaz a P-re vonatkozó kvótát $q(P)$-vel jelöljük. Korábbi jelölésünket használva $q_C = q(\{C\})$.* (Szubadditív) többszintű kvótákról *akkor beszélünk, ha létezik olyan P, hogy*

$$q(P) < \sum_{C \in P} q(C). \tag{3.3.1}$$

A többszintű kvóták egyfajta rendszert alkotnak és az ilyen rendszerek közül a hierarchikus rendszerek különösen érdekesek.

3.18. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* kvóták hierarchikus rendszert alkotnak, *ha az iskolák minden $P, Q \subset \mathcal{C}$ részhalmazának létezik olyan $P = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$ illetve $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_l)$*

partíciója, hogy $q(P) = \sum_i q(P_i)$, *és* $q(Q) = \sum_i q(Q_i)$, *illetve bármely* (P_i, Q_j) *párra*

$$P_i \cap P_j \in \{P_i, Q_j, \emptyset\}\,. \tag{3.3.2}$$

A magyarországi rendszerben azt mondhatjuk, hogy a kvóták hierarchikus rendszert alkotnak, ha az egyes képzésekre vonatkozó keretszámokon túl megfogalmazhatók több intézményre vonatkozó együttes kvóták, vagy együttes kvóták szakcsoportokra, képzési területekre, stb. vonatkozóan. Bár a magyarországi felvételi nem így működik, elképzelhető egy olyan rendszer is, ahol a szakonként, karonként és intézményi szinten megadott felvételi korlátok szubadditívak. Például a Maastrichti Egyetem közgazdasági karán évente 6 doktorandusz kap ösztöndíjat, melyből a hat tanszék mindegyike legfeljebb kettőt kaphat meg.

3.19. Tétel. *Legyen* $\mathcal{C}$ *az iskolák,* $\mathcal{S}$ *pedig a hallgatók halmaza; jelölje* P *a preferenciáikat,* q *pedig egy kvóta-függvényt. Az így definiált* $(\mathcal{C}, \mathcal{S}, P, q)$ *felvételi problémára a hallgató-optimális vonalhúzási algoritmus stabil párosítást eredményez ha* q *hierarchikus.*

Ha többszintű keretszámokkal dolgozunk az algoritmust némileg módosítani kell. Adottnak tekintve a hallgatók és a szakok preferenciáit többszintű keretszámok esetén a felvételi ponthatárok meghatározása, azaz a párosítás a következőképpen történik:

1. Minden hallgató az általa első helyen megjelölt szakot választja.

2. Minden egyes iskolához rendelünk egy ponthatárt. Ha az iskolát a kvótájánál kevesebben választják, akkor a ponthatár a legalacsonyabb pontszámmal jelentkező hallgató pontszáma. Ha a C iskolát választók száma meghaladja a $q(C)$ kvótát, azt a legalacsonyabb ponthatárt választják, melyre még igaz, hogy a ponthatár feletti jelentkezések a kvóták

alapján még mind felvehetők; minden más hallgató elutasításra kerül, jelentkezésüket töröljük.

3. A kvóták hierarchiája mentén feljebb lépegetve ellenőrizzük, hogy a jelentkezők nem lépik-e túl a kvóták. Az iskolák valamely P halmazánál egy összesített rangsor készül a felvételi pontok alapján és a kvótán felüli jelentkezések törlésre kerülnek. Ezt a vizsgálatot a hierarchiában felfelé haladva minden szinten el kell végezni.

4. Ha az elutasított hallgatóknak van még további jelentkezése, akkor a preferált élő jelentkezést választják. Ha nincs további jelentkezésük, akkor az elutasított hallgatók nem nyernek felvételt, a felvételi ponthatárok pedig az utolsó értéken rögzülnek.[4]

Az algoritmus konstrukciójából adódóan hallgató-optimális stabil párosítást eredményez.

Nem hierarchikus keretszámok esetén az algoritmus nem feltétlenül eredményez stabil párosítást. Vegyük a következő példát:

2. Példa. *Legyen* $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$*, illetve* $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_6\}$*. A preferenciák az alábbiak szerint alakulnak:*

$$\begin{aligned}
\textit{ha } C_i \in \mathcal{C}\textit{, akkor } p(C_i) &= s_1, s_2, \ldots, s_6 \\
p(s_1) = p(s_2) &= C_1 \\
p(s_3) = p(s_4) &= C_2 \\
p(s_5) = p(s_6) &= C_3,
\end{aligned}$$

[4] Előfordulhat, hogy egy intézményhez egyáltalán nem érkezik jelentkezés – itt a ponthatár lényegtelen, tetszőlegesen választható meg.

végül ha $i \in \{1, 2, 3\}$, $q(\{C_i\}) = 2$, $q(\{C_1, C_2\}) = q(\{C_2, C_3\}) = 3$, $q(\mathcal{C}) = 5$.

Az algoritmus harmadik lépésében a $\{C_2, C_3\}$ halmaz vizsgálatánál s_6, míg $\{C_1, C_2\}$ vizsgálatánál s_4 kerül elutasításra, holott már s_4 elutasítása holott az utóbbi lépés megoldja az első problémát is. Így tulajdonképpen az első elutasítással visszakozhatunk, mivel erre az algoritmus nem ad lehetőséget, a (C_3, s_6) páros blokkolhatja a kapott eredményt. Érdekes, hogy itt s_6 a nála jobb pontszámmal hallgató s_4 kiesésével biztosíthatja a helyét. Ha a keretszámok hierarchikusak a stabil párosítások meghatározása, sőt létezésének igazolása nyitott kérdés egyenlőre.

Bár a magyar felsőoktatási rendszerben a kvóták több dimenzió mentén is meghatározásra kerülnek: egyszerre léteznek keretszámok országos szinten szakonként, másrészt a felvételeknél a karok kapacitása is beléphet korlátként, az intézményekben az egyes szakokra megadott kvóták pontosan a kapacitások figyelembevételével kerültek meghatározásra. Így a többszintű rendszer hierarchikus, bár ennek nem szükséges feltétlen így lennie. Ebből két dolog következik:

1. A magyar felsőoktatási felvételi esetében a többszintű kvóták ellenére is jól működhet a vonalhúzási algoritmus.

2. Az intézmények számára nem kis frusztrációt okoz az egyes szakokra vonatkozó kvóták meghatározása. Egy olyan rendszerben, ahol az intézmények a kapacitásuk minél jobb kihasználásával tudják csak biztosítani finanszírozásukat fontos hogy ne maradjon kitöltetlen kvóta ha más szakon, tagozaton, stb. túljelentkezés van. Mivel a jelentkezéseket nem lehet pontosan előre megjósolni ma a megoldás a keretszámok utólagos kiigazítása. Sokkal egyenesebb megoldás lenne a nem-hierarchikus többszintű keretszámok használata. Sajnos erre az esetre még nincs kidolgozott párosítási algoritmus.

3.3.3. Legkisebb induló létszámok

Bár egyrészről az intézmények szeretnének minél több hallgatót felvenni, gazdaságos működésükhöz szükséges minimális induló létszámok megadása is. Minimális induló létszám esetén csak akkor indul el egy képzés, ha a felvehető hallgatók száma eléri ezt az alsó korlátot, ellenkező esetben a rá leadott jelentkezések törlésre kerülnek.

Ez a szempont a párosítások korai alkalmazásainál egyáltalán fel sem merül. Házassági piacokon egy-az-egyhez párosításról van szó, azaz a kvóta mindig 1. Így valaki vagy párosításra kerül, vagy nem, s ha párosításra kerül (stabil párosítás esetén) konstrukcióból adódóan örömmel elfogadja partnerét. A rezidensképzés fő mozgatórugói a kórházak, amik a rezidensekben elsősorban jól képzett, olcsó munkaerőt látnak. Minden egyes rezidens pénzt hoz, így inkább az okozott problémát, ha egy kórház nem tudott annyi rezidenst felvenni, mint szeretett volna. Az általános iskolai párosításoknál (Abdulkadiroğlu, Pathak, és Roth, 2005; Teo, Sethuraman, és Tan, 2001) semelyik iskola nem marad tanulók nélkül, hiszen a párosításból kimaradt jelentkezők a maradék helyekre kerülnek szétosztásra.

A magyar helyzet abból a szempontból speciális, hogy az intézményeknek viszonylag kevés lehetősége van a kevésbé sikeres programok átszervezésére. Míg nyugat európai országokban 2-3 fővel is elindulhat egy mesterképzés, hiszen a kurzusok jelentős része összevonható más programokkal, Magyarországon gyakorlatilag egy teljes programot kéne biztosítani a szóban forgó hallgatóknak. Sajnos ez egy objektív probléma, ami ugyanakkor meglehetősen profán hatással van a párosításokra.

3.20. Tétel. *Az olyan felvételi problémáknak, ahol megengedünk minimális induló létszámot is* *nem mindig van stabil párosítása.*

A tétel igazolása egyszerűen egy ellenpéldával történik (Lényegében: Bíró és Fleiner, 2008). A példában $\underline{q}(C)$-val jelöljük a C szakra vonatkozó alsó korlátot.

3. Példa. *Két szakról és két hallgatóról lesz szó.* $\underline{q}(C_1) = q(C_1) = 1$*,* $\underline{q}(C_2) = q(C_2) = 2$*;* $p(C_1) = p(C_2) = s_1, s_2$. $p(s_1) = C_2, C_1$, $p(s_2) = C_1, C_2$.

Az alábbi párosítások lehetségesek:

C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
s_1	(nem indul)	s_2	(nem indul)	(nem indul)	s_1, s_2
A		B		C	

Az A esetben mind s_1, s_2 és természetesen C_2 is preferálná a C párosítást, tehát ez a koalíció blokkolhatja A-t. A B párosítást $\{s_1, C_1\}$ a C párosítást pedig $\{s_2, C_1\}$ blokkolja.[5]

A jelenleg használt hüvelykujj-szabály szerint az a szak nem kerül elindításra, ahol a jelentkezők aránya a legkisebb induló létszámhoz képest a legkisebb, bár a részletes algoritmus nem publikus.

Itt tehát azt kell megállapítanunk, hogy a minimális induló létszámok megállapítása, bár ártatlan, és természetesen szükségszerű módosítás, sajnos éppen a vonalhúzási algoritmus fő erényét a stabilitást veszélyezteti.

[5]Érdekesség, hogy az A párosítást semelyik pár nem blokkolja, tehát az ilyen párosításokra nem igaz az az észrevétel, hogy a csoportos blokkolás ekvivalens a blokkoló párok létezésével, hacsak nem feltételezzük, hogy itt s_2 tulajdonképpen kitartott C_2 mellett, csupán a minimum induló létszám miatt ez a döntés nem látható a párosításban.

3.3.4. Kétféle finanszírozási forma

Önmagában az, hogy két ponthatár nem határozható meg egymástól teljesen függetlenül, akár jelenthetne problémát is, azonban itt egy nagyon speciális esetről van szó, hiszen aki jelentkezik költségtérítéses képzésre az valószínűleg jelentkezik a szak államilag finanszírozott formájára is. Mivel a képzés a finanszírozási formától függetlenül történik, az államilag finanszírozott és a költségtérítéses hallgatókra vonatkozik egy közös kvóta is, amit az intézményi kapacitás határoz meg. Ennek tükrében a vonalhúzás – gyakorlatilag – a következőképpen történik. Első körben az államilag finanszírozott helyek kerülnek kiosztásra, hiszen ezeket minden hallgató preferálja. Ha a intézmény/képzés kapacitása még engedi, akkor ennek terhére illetve a +10%-os szabály figyelembevételével van lehetőség az államilag finanszírozott helyekre be nem került hallgatók felvételére. Ezek után alkalmazhatók az esetleges magasabb szintű felvételi korlátok. Az algoritmus futásában a +10%-os szabály figyelembe vétele tehát nem jár semmilyen problémával.

Megjegyzendő ugyanakkor, hogy az érvelés messzemenően kihasználja a tényt, hogy a két „szak” (valójában finanszírozási forma) vertikálisan differenciált, azaz minden hallgató az államilag finanszírozott formát preferálja. Ha egy intézmény a rövid távú létszám- (és ezáltal bevétel-) maximalizáló stratégia helyett például arra törekedne, hogy a megbízhatóan magas szintű képzésével szerezzen hírnevet és ezzel hosszú távon több jó hallgatót felmerülhetne az az elv is, hogy például az intézményben induló képzések ponthatárai között ne legyen nagy az eltérés. Ha ilyen horizontálisan differenciált szakok (azaz olyan szakok, ahol a preferenciasorrend ízlés kérdése) között fogalmazunk meg a probléma lényegesen bonyolultabb, tulajdonképpen felfogható egy némileg szabadon értelmezett intézményi szintű korláttal. Utóbbira az imént láttuk be, hogy a stabil párosítás megtalálása nem triviális, az algoritmus meghatározása egyelőre nyitott kérdés.

3.3.5. Pontegyenlőség

A magyar felsőoktatási felvételi rendszerben az intézmények nem a hagyományos értelemben vett preferenciákkal rendelkeznek, hanem részben korábbi tanulmányi eredményei, részben egyéb „hozott pontok" alapján kerülnek rangsorolásra. A hallgatók maximális pontszáma 2007. előtt 144, a reform óta legfeljebb 480 pont. Ha tekintetbe vesszük, hogy egy 50%-os érettségi eredmény duplázva 200 pontot ér, látható, hogy a körülbelül százezer hallgató, fejenként több jelentkezéssel, sok holtversenyt eredményez még akkor is, ha természetesen a pontegyenlőségeknek csak a szakokon belül van jelentősége.

Hagyományosan a párosítások elmélete szigorú preferenciákat feltételez, ugyanakkor az elmélet könnyedén kiterjeszthető olyan rangsorokra is, ahol egyenlőség szerepel: a megoldás az egyenlőség tetszőleges módon való feloldása. A gyakorlatban többféle módon is kezelhető ez a probléma. A bostoni általános (Alcalde, 1996; Abdulkadiroğlu, Pathak, Roth, és Sönmez, 2005) és a new yorki középiskolák (Abdulkadiroğlu, Pathak, és Roth, 2005) esetében a hallgatókat véletlenszerűen rangsorolják, s ha két hallgató a kritériumoknak egyformán felel meg, illetve egyforma pontszámmal rendelkezik, akkor az eredeti rangsort veszik figyelembe. A magyar középiskolák is egy szigorúan rendezett rangsort adnak meg: itt az egyenlőséget a felvételi bizottság tulajdonképpen önkényesen oldja fel, de a döntés jellemzően olyan elveken alapszik, mint például egy matematika tagozatra az egyenlő pontszámmal hallgatók közül az kerül előrébb a rangsorban, akinek jobb a matematika osztályzata. Más rendszerekben, és ilyen a magyar felsőoktatási felvételi is, de hozhatunk példát Spanyolországból is (Romero-Medina, 1998), az egyenlőségeket valóban holtversenyként kezelik, így ha egy 390 pontos hallgató nem kerül be egy adott szakra, akkor ugyanoda egy másik 390 pontos hallgató szintén nem nyer felvételt. Ez akkor is így van, ha a ponthatár 391 pontnál került meghúzásra és még maradtak betöltetlen helyek is.

Fontos megállapítanunk, hogy a vonalhúzási algoritmus megengedi a pontegyenlőséget, viszont a legszigorúbb értelemben alkalmazza az egyenlő elbánás elvét: ha a keretszám 100 felvételt enged és 101 holtversenyes hallgató van, akkor a ponthatár már nem vihető lejjebb – A kvóták utólagos korrekciója pontosan az ilyen szélsőséges helyzeteket orvosolhatja, de természetesen arra nincs lehetőség, hogy mindenhol tökéletesen ki lehessen tölteni a keretszámokat. Ebben az értelemben a pontegyenlőségek egyfajta hatékonyságvesztéshez vezetnek. Ez a veszteség nyilván annál kisebb, minél ritkábbak a holtversenyek. Már önmagában a felvételi pontok maximumának 144-ről 480-ra emelése drámai lépés. Míg például Bostonban mindössze két bináris jellemző alapján értékelik a hallgatókat (Előnyt élvez, akinek testvére már jár az adott iskolába, majd ezek után az, aki gyalogtávolságra lakik; természetesen első helyre azok kerülnek, akikre mindkettő teljesül) és így a hallgatók mindössze 4 kategóriába sorolhatók tömeges holtversenyeket eredményezve, ahol a holtversenyek ritkábbak, mint például a vizsgált felsőoktatási felvételi esetén, a pontegyezések feloldása kevésbé fontos.

Ezzel együtt megfontolandó lenne a középiskolai felvételinél alkalmazott heurisztikák formalizálása, hivatalos alkalmazása itt is: például ha pontegyezés esetén előbb nyer felvételt az a pályázó, akinek a többletpontok nélkül magasabb a pontszáma. Ilyen és hasonló szabályokkal csökkenthető a holtversenyek esélye, a betöltetlen helyek száma, kevesebb lenne a nagy számú betöltetlen hely okán való utólagos korrekció és általában átláthatóbb lenne a felvételi folyamata. Természetesen nem a véletlenszerű rangsorolás az egyetlen alternatíva, Erdil és Ergin (2008) javasolnak egy gyors algoritmust, mely Pareto-optimális módon oldja fel a holtversenyeket.

3.3.6. Jelentkezési korlátok

Míg az eddigiekben korlátokról a felvehető hallgatókkal kapcsolatban volt csak szó, most visszakanyarodunk a felvételi folyamat legelejére, a jelentkezési lap kitöltéséhez. Szemben a középiskolai felvételivel ahol a sok jelentkezés kitöltésének a „költsége” mindössze egy négyzet beikszelése, a felsőoktatási felvételi esetében a felvételi lapon csak 3 intézmény/szak/tagozat, stb. jelölhető meg, minden további jelentkezésért kiegészítő díjat kell fizetni. Mivel a szabályok és a hallgatók száma évről évre igen hektikusan változhat és mivel a jelentkezés pillanatában a hallgató legjobb esetben is csak egy becsléssel rendelkezhet a felvételi pontszámát illetően, a jelentkező csak a teljes preferencialista megadásával biztosíthatja, hogy az általa elérhető legjobb helyre nyerjen felvételt.

Mielőtt rátérnénk a probléma elméleti elemzésére, szeretnénk néhány félreértést tisztázni.

Elsőként: kézenfekvő azt mondanunk, hogy az a hallgató, aki pontosan az elérhető legjobb helyet hagyja ki a jelentkezési lapról, meg is érdemli a sorsát. Nos, itt a hangsúly az *elérhetőn* van. Még akkor is ha a hallgató jól definiált lineáris preferenciákkal rendelkezik a képzéseket illetően, az elérhető legjobb keveseknek a „legjobb”, azt pedig, az érettségi eredmények és természetesen a többi hallgató jelentkezéseinek ismerete nélkül igen nehéz megjósolni, hogy az elérhető legjobb a 3., 5., vagy éppen 8. lesz a listán.

Meglehetős naivitásra vall részünkről az az elméleti feltételezés, hogy a hallgatók rangsorolni tudják a több tucat intézmény által kínált több száz különböző képzést, nem beszélve a különböző tagozatokról, finanszírozási formákról. Erre ugyanakkor aligha lenne szükség: a hallgatók többnyire elég határozott preferenciákkal rendelkeznek akár a képzési területet illetőleg, de van aki a régiójában szeretne maradni, van akit csak néhány nagyhírű egyetem vonz, stb, stb. Ilyen és hasonló megfontolások leszűkíthetik a sort pár tucat lehetőségre, melyek közül a teljesen elfogadhatatlanok, illetve a biztosan elérhetetlenek is kihullanak. Az ugyanakkor aligha jellemző, hogy egy hallgató számára csak 3, vagy annál kevesebb elfogadható szak létezik, tehát a hallgatók vagy lemondanak bizonyos lehetőségekről, vagy fizetnek. Ennek némileg ellentmond, hogy a hallgatók jó része még a három lehetőséget sem tölti ki.

Utóbbinak oka, úgy gondoljuk, részben pszichológiai részben pedig a felvételi folyamat laikus számára való átláthatatlansága. Valószínűleg sok hallgató nincs tisztában azzal, hogy ki láthat bele a felvételi lapjába. A jelentkezési lapok kitöltésében valószínűleg sokat „segítenek” a szülők, akik még egy teljesen más rendszerben adták be a jelentkezésüket, ahol a szubjektív értékelésnek sokkal nagyobb szerepe lehetett. Gondolunk itt arra, hogy még akár 20 éve is természetes volt, hogy a középiskolai felvételi során a teljes jelentkezési csomag utazott az első helyen megjelölt iskolába, ahol nem mindig nézték jó szemmel, ha valamely konkurens iskola is szerepelt a megjelöltek között, ha pedig a vetélytárs a listán előkelőbb helyen szerepelt, tehát már el is utasította a hallgatót, a helyzet – legalábbis bizonyos intézmények esetében – szinte reménytelen lett. Van olyan, aki úgy gondolja, hogy az általa reális bejutási eséllyel pályázható orvosi egyetem mellé egy kicsit optimistább szcenárió esetén elérhető intézmény feltüntetése csak ront az esélyeken.

Olyan is van, aki úgy gondolja, hogy ha egyetlen helyre pályázik, azzal meggyőző magabiztosságot mutat az intézmény felé. Természetesen ez is értelmetlen, hiszen az egyes intézmények a jelentkezőkről nagyon kevés adatot kapnak meg, azt pedig semmiképpen, hogy egy hozzájuk beérkezett jelentkezés hol helyezkedik el a pályázó rangsorában.

Természetesen a jobb tájékoztatás, alaposabb tájékozódás sokat segíthet ezeken a furcsa stratégiákon, de kérdés, hogy egyáltalán probléma-e, ha valaki kevés helyre jelentkezik, illetve probléma-e az, ha a jelentkezések számát korlátozzuk. A továbbiakban erre keressük a választ.

A magyarországi modell speciális, hiszen elvben tetszőleges számú intézmény rangsorolható, ugyanakkor a további szakok megjelölését kiegészítő díjjal bünteti a rendszer. Nehéz megítélni, hogy mekkora a kiegészítő díj jelentősége. Az bizonyos, hogy nem elhanyagolható és a pályázónkként leadott alacsony számú jelentkezés inkább arra utal, hogy a hallgatók nem szívesen vállalnak további költséget. Így nem alaptalan a kiegészítő díj által adott puha korlátot merev korlátként modellezni. A továbbiakban tehát feltételezzük, hogy minden hallgató legfeljebb k szakra adhat be jelentkezést.[6]

A probléma alaposabb tanulmányozásához kicsit formalizáljuk a 3.1.3 szakaszban tárgyalt stratégiai modellt. Egy adott P preferencia profil és k jelentkezési korlát esetén jelölje Q^k a hallgatók által megadott, darabonként legfeljebb k elemű preferencia-profilt.

Mivel az iskolák nem viselkednek stratégiai játékosként, konkrétan: nem adnak meg a valós-

[6] Mivel az alábbi eredmények sehol sem használják ki a, hogy a hallgatók csak egyforma hosszúságú listákat adhatnak meg. Így kiindulhatunk abból, hogy anyagi és tanulmányi helyzete alapján minden hallgató számára létezik egy optimális hosszúságú jelentkezési lista és a továbbiakban ezzel dolgozunk. (Haeringer és Klijn, 2009).

tól eltérő preferenciákat a hallgatókra vonatkozólag, elegendő a felvételizőket, mint játékosokat vizsgálnunk. Így, a játék leírható egy $(\mathcal{S}, P, \mathcal{Q}^k)$ hármasként, ahol $\mathcal{S}$ a hallgatók halmaza, P a hozzájuk tartozó és az iskolákra vonatkozó preferencia-profil, $\mathcal{Q}^k$ pedig a legfeljebb k hosszúságú megadott preferencia-profilok halmaza. A P preferenciák éppúgy alkalmazhatók párosításokra, mint intézményekre, hiszen a modell externáliáktól mentes, a hallgatókat csakis az érdekli, hogy melyik intézménybe nyernek felvételt. Így pontosan akkor $\mu >_s \mu'$ ha $\mu(s) >_s \mu'(s)$.

Ha $Q \in \mathcal{Q}^k$ akkor Q_s az s hallgató preferenciáit jelöli, míg Q_{-s} alatt a többi játékos által Q-ban megadott preferencia-profilt értjük. Így tehát $Q = (Q_s, Q_{-s})$. Egy ϕ párosítási mechanizmus minden megadott preferencia profilhoz rendel egy párosítást, melyet $\phi(Q)$-val jelölünk. Az eredeti P preferencia profilhoz tartozó, legfeljebb k-hosszúságú jelentkezési lapokhoz tartozó Nash-egyensúly[7] alatt azt a $Q^k \in \mathcal{Q}^k$ megadott preferencia-profilt értjük, melyre teljesül, hogy bármely s hallgatóra és bármely Q'_s megadott preferenciasorra igaz, hogy

$$\phi(Q_s, Q_{-s}) >_s \phi(Q'_s, Q_{-s}).$$

A továbbiakban a cél az egyensúlyi stratégiák meghatározása.

A jelentkezési korlátok nélkül alkalmazott hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmusban (és így az azzal ekvivalens vonalhúzó algoritmusban is) gyengén domináns stratégia a teljes preferencia-lista felfedése. Ez azt jelenti, hogy bármi is legyen a többi hallgató preferenciája, illetve bármik is legyenek az iskolák által kialakított rangsorok, egy hallgató soha nem járhat jobban, mint ezzel a stratégiával, viszont más stratégiát választva jellemzően rosszabbul

[7] Ilyen egyensúly mindig létezik, de előfordulhat, hogy csak kevert stratégiákban, ami rendkívül bonyolulttá teszi a preferencia-sorok megadását.

jár. Mivel a jelentkezési korlátok mellett jellemzően nincs lehetőség a teljes preferencia-sor megadására, ez a stratégia nem választható és nincs is más gyengén domináns stratégia. Létezik ugyanakkor a stratégiáknak dominálatlan részhalmaza, azaz egy olyan részhalmaza, hogy a hallgatóknak biztosan e halmazból kell stratégiát választaniuk.

3.21. Állítás. *(Haeringer és Klijn, 2009) A k felvételi korlát esetén a következő stratégia halmaz dominálatlan:*

1. *Ha egy hallgató nem több, mint k programot tart elfogadhatónak, akkor nem járhat jobban, mint valós preferenciái felfedésével.*
2. *Ha egy hallgató több, mint k programot tart elfogadhatónak, akkor nem járhat jobban, mint mikor egy olyan stratégiát alkalmaz, ahol az elfogadható szakok közül k darabot kiválaszt és ezeket a valós preferenciáinak megfelelő sorrendben adja meg.*

Mint már korábban kimondtuk, bármilyen jelentkezési korlát esetén lesz egyensúlya preferencia megadó játéknak. A következő tétel már némileg informatívabb az egyensúlyokat illetőleg:

3.22. Tétel. *(Haeringer és Klijn, 2009) Ha a Q^k preferencia-profil Nash egyensúlyt alkot a k jelentkezési korlátú játékban, akkor szintén Nash egyensúlyt alkot a k' jelentkezési korlátú játékban is, ha $k' \geq k$.*

Ha az egyensúlyokat tisztáztuk, vissza kell térnünk arra az alapvető kérdésre, hogy az egyensúlyi stratégia profilok alapján meghatározott párosítások mennyire felelnek meg az eredeti preferenciáknak, a valós preferenciák tükrében stabil-e a párosítás. Az első tétel a bostoni algoritmust vizsgálva került megállapításra:

3.23. Lemma. *(Ergin és Sönmez, 2006, 1. tétel) Ha az adott P valós preferenciák mellett, a bostoni párosítási mechanizmus alkalmazása esetén Q^* Nash-egyensúlya a preferencia megadási játéknak, akkor a Q^* párosítás stabil a P preferenciák szerint.*

Bár a lemma nem feltételez jelentkezési korlátokat, a bostoni mechanizmus konstrukciójából adódóan egyensúlyban csak az elsőhelyes jelentkezések számítanak. Így mondhatni $Q^* = Q^{1^*} = Q^{k^*}$. Visszatérve a vonalhúzási, azaz a hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmusra, elsőként megállapítjuk, hogy $k = 1$ esetén a bostoni és a vonalhúzási algoritmus ugyanazt a párosítást adják, tehát a 3.23 lemmából következik:

3.24. Következmény. *Ha az adott P valós preferenciák mellett, a vonalhúzási algoritmus, mint párosító mechanizmus alkalmazása és $k = 1$ jelentkezési korlát esetén Q^{1^*} Nash-egyensúlya a preferencia megadási játéknak, akkor Q^{1^*} stabil párosítás a P preferenciák szerint.*

Ez azt jelenti, hogy ha minden hallgató csak egy szakot jelölhet meg, akkor is kitöltheti úgy a jelentkezési lapot, hogy a vonalhúzó algoritmus által megadott párosítás

1. stabil a megadott preferenciák alapján, és

2. stabil a valódi preferenciák alapján.

Az egyensúly megadása sem nehéz. Vegyük ugyanis a jelentkezési korlátok nélküli esetet. A vonalhúzó algoritmus minden hallgatót az általa elérhető legjobb szakhoz sorolja. Ha ezek után minden hallgató pontosan ezt a szakot írja a jelentkezési lapjára, akkor pontosan ugyanez a párosítás jön létre. Az is világos, hogy egy ennél – a valós preferenciák szerint – jobb, tehát már nem elérhető szakot beírni botorság, hiszen a szak pontosan azért nem volt elérhető, mert vagy kitöltötték jobb hallgatók a felvételi keretet, vagy a hallgató eleve elfogadhatatlan a szak számára; rosszabb szak beírásával pedig nem nyerhet a hallgató.

Mivel a 3.22 tétel alapján ez az egyensúly minden magasabb jelentkezési korlát mellett is megmarad, megkapjuk a legáltalánosabb pozitív eredményt amit mondhatunk:

3.25. Következmény. *A P valós preferenciák mellett, a vonalhúzási algoritmus, mint párosító mechanizmus alkalmazása és k jelentkezési korlát esetén a preferencia megadási játéknak létezik olyan Q^* Nash-egyensúlya, hogy Q^* stabil párosítás a P preferenciák szerint.*

Sajnos a stabilitás nem igaz *minden* Nash-egyensúlyra. Tekintsük a következő példát!

4. Példa. *(Haeringer és Klijn, 2009, 6.2. példa) Legyen $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3\}$ a hallgatók, $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ az iskolák halmaza. Feltételezzük, hogy minden iskolába legfeljebb 1 hallgató vehető fel és, hogy a jelentkezéskor legfeljebb $k = 2$ hely pályázható. A preferenciák a következők:*

$$\begin{aligned}
P(s_1) &= \underline{C_1}, C_3, C_2 \\
P(s_2) &= C_3, C_1, \underline{C_2} \\
P(s_3) &= \underline{C_3}, C_2, C_1 \\
P(C_1) = P(C_2) &= s_3, s_1, s_2 \\
P(C_3) &= s_1, s_2, s_3
\end{aligned}$$

Legyen továbbá

$$\begin{aligned} Q(s_1) &= C_1, C_3 \\ Q(s_2) &= C_1, C_2 \\ Q(s_3) &= C_3, C_1 \end{aligned}$$

A Q alapján készített párosítást aláhúzással jelöltük a valódi preferenciák között. Látható, hogy bár Q egyensúlyi a párosítást blokkolja a $\{s_2, C_3\}$ páros.

A résztvevők számának növekedésével azt várjuk, hogy az ilyen esetek egyre gyakoribbak lesznek, felmerül tehát a kérdés, hogy milyen esetekben remélhetjük, hogy a párosítások, tehát minden párosítás stabil a valódi preferenciák alapján.

A kérdés megválaszolásához szükségünk van egy további definícióra.

3.26. Definíció. *(Ergin, 2002) Legyen $P_{\mathcal{S}}$ az iskolákhoz tartozó preferencia-profil, q pedig kvótákból álló vektor. Jelölje $U_C(s) = \{t \in \mathcal{S} \,|\, t >_C s\}$ a C által az s hallgatónál előrébb sorolt hallgatók halmazát. Egy ciklus olyan, páronként különböző $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ iskolákból és $s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{S}$ hallgatókból áll, hogy az alábbiak teljesülnek:*

Ciklikussági feltétel $s_1 >_{C_1} s_2 >_{C_1} s_3 >_{C_2} s_1$, *illetve*

Hiányfeltétel *léteznek a hallgatóknak olyan $S_1, S_2 \subset \mathcal{S} \setminus \{s_1, s_2, s_3\}$ részhalmazai, hogy $N_1 \subset U_{C_1}(s_2)$, $N_2 \subset U_{C_2}(s_1)$ és $|N_1| = q_1 - 1$, illetve $|N_2| = q_2 - 1$.*

Egy preferencia-struktúra Ergin-aciklikus, ha mentes a fent leírt ciklusoktól

Ergin (2002) közvetlen megoldást is kínál a ciklikusság azonosítására – erre most terjedelmi okokból nem térünk ki.

3.27. Tétel. *(Haeringer és Klijn, 2009) Legyen* $k \neq 1$. *Az iskolák* P_S *preferencia-profilja akkor és csak akkor Ergin-aciklikus, ha minden egyes* P *kiterjesztésére igaz, hogy a preferencia-megadási játék Nash egyensúlyain lefuttatott vonalhúzási algoritmus által eredményezett párosítások stabilak a valós preferenciák alapján.*

Természetesen a vonalhúzási algoritmus a megadott preferenciákhoz képest mindig stabil párosítást eredményez – ez itt is igaz marad.

Abban a speciális esetben például, ahol a szakokhoz tartozó preferenciák mind egyeznek, a stabilitás itt is garantált, sajnos ez már kismértékű eltérések esetén sem marad mindig igaz. Így valószínű, hogy a magyarországi felsőoktatási felvételiben az iskolák preferencia-profilja nem Ergin-aciklikus, így a korlátozott jelentkezéseken alapuló felvételi párosítás sem feltétlenül stabil a valós preferenciák szerint.

A taktikázás nem csak a jelenkezők számára probléma: A csökkenő hallgatói létszámok, és az ezzel párhuzamosan – paradox módon – megjelenő újabb és újabb intézmények és képzések kínálati piacot hoznak létre, ahol a minőség egyre fontosabb lehet. Részben ennek köszönhetően megjelentek Magyarországon is a az intézmények különböző rangsorai – részben éppen a jelentkezési statisztikák alapján. Egy olyan felvételi rendszerben ugyanakkor, ahol az őszinteség nem kifizetődő, nincs sok értelme jelentkezési statisztikákról beszélni. Egy iskolába, ahová közismerten nehéz bekerülni, a hallgatóknak csak egy kis része fog pályázni, hiszen a legtöbbjüknek egész egyszerűen pénzkidobás volna az egyik jelentkezési lehetőséget erre az elérhetetlen intézményre fecsérelni. Ugyanakkor egy kifejezetten gyenge intézmény még jól is szerepelhet azon hallgatóknak köszönhetően inkább járnak „valahova”, semhogy ne nyerjenek felvételt és akik esetleg ide sem nyernek felvételt az országosan meghatározott magasabb rendű kvóták miatt. Teljesen más lenne a helyzet, ha a hallgatóknak érdeke lenne a valós preferenciákat megadni: ekkor akár az elsőhelyes jelentkezések vizsgálata is elegendő lehetne.

3.3.7. Hiányos információ

Utolsó területként az idealizált modellnek egy olyan módosításáról ejtünk szót, ami ha kisebb mértékben is, de minden felvételi rendszernek problémája: a tökéletes informáltság hiánya. Bár a probléma általános, az irodalom jelentős része az olyan iskolaválasztási problémákat vizsgálja, ahol az iskolák preferenciái ismertek a jelentkezés pillanatában. Például Bostonban a lakcím és az esetleges iskolába járó testvérek alapján készül a rangsorolás – természetesen mindkét információ ismert. Így a hallgatók jó eséllyel meg tudják ítélni, hogy mely iskolákba jelentkeznek jó eséllyel, míg melyek azok az iskolák, ahol esetleg teljesen felesleges próbálkozni.

A magyarországi rendszerben a jelentkezéskor csupán az intézmények/szakok korábbi években megállapított felvételi pontszámai, illetve a jelentkezési adatai állnak rendelkezésre, ami a legfájóbb, a hallgató diák éppen azt nem tudja, hogy körülbelül hol fog szerepelni az egyes iskolák rangsoraiban, hiszen érettségi eredménye csak hónapok múlva lesz ismert. Eme információhiány okozta esetleges tévedések orvoslására lehetőség van a *leadott* jelentkezések sorrendjének megváltoztatására (viszont új jelentkezést nem lehet megadni). Ugyanakkor a 3.21 állítás alapján erre csak akkor van szükség, ha időközben megváltoztak a hallgató valódi preferenciái.

Ha ugyanis valaki az orvosi egyetemre szeretne menni, de rosszul sikerül a fizika érettségije, az orvosira leadott jelentkezése jelentőségét veszti és ebből a szempontból teljesen lényegtelen, hogy a megadott preferencia sorrendben hol helyezkedik el. A változtatásnak lehet értelme, ha az érettségi ráébreszti a hallgatót, hogy ő a fizikával egyáltalán nem szeretne foglalkozni, tehát, ha a medikusok élete (részben) erről szól, akkor ő az orvosira való jelentkezését hátrébb sorolja.

Probléma abból adódhat, hogy egyrészt a példában említett orvosi egyetemi jelentkezést valószínűleg sosem lett volna szabad beírni, így a hallgató vagy feleslegesen fizetett kiegészítő díjat, vagy/és feleslegesen foglalta el a helyet más, értelmesebb jelentkezésektől.

Végül, bár az elmúlt évek jelentkezési pontszámai elérhetők, meglehetősen keveset mondanak már az akkori jelentkezési preferenciákról is, nem beszélve a szóban forgó évről. Ha a hallgatók bizonytalanok a hallgatótársak preferenciáit illetőleg, egy jóval összetettebb bayesi modellt kellene alkalmaznunk (Ergin és Sönmez, 2006, 8. szakasz).

3.3.8. Összefoglalás

A felsőoktatási felvételi rendszer fő eleme, a vonalhúzó algoritmus ekvivalens a hallgató-optimális késleltetett elfogadási algoritmussal. Ez rendkívül jó hír hiszen az algoritmust leíró szerzők után Gale-Shapley algoritmusként is emlegetett mechanizmus stabil párosításokat eredményez, és a stabilitásnak komoly szerepe van egy mechanizmus elfogadtatásában. A stabilitás itt tulajdonképpen azt mondja ki, hogy nincs jogos irigység, azaz nincs olyan hallgató, akit a pontszáma alapján egy jobb helyre is felvehettek volna, de mégsem oda került.

Szerencsére a felvételi apróbb, specifikusan magyar részletei többnyire megőrzik ezt a tulajdonságot. Így a Magyarországon hierarchikus rendszert alkotó felvételi keretszámok, a kétféle finanszírozási forma, illetve a pont-alapú értékelésből fakadó holtversenyek mind megengedhető változások. Ugyanakkor, ha legkisebb induló létszámokat is megadhatunk és ha egy ilyen létszámot a felvehető hallgatók száma nem éri el, akkor a szóban forgó szak egyszerűen nem indul, a leadott jelentkezések pedig törlésre kerülnek.

A Gale-Shapley algoritmus gyengéje, hogy a párosítás résztvevőinek általában nem áll érdekében felfedni valós preferenciáikat – itt ugyanakkor éppen egy speciális esetről van szó: mivel az iskolák nem stratégiai megfontolások alapján határozzák meg preferenciáikat, a hallgatóknak pedig érdeke a valós preferenciák megadása, hiszen a párosítás ezekhez képest lesz optimális, ezért itt mindkét fél felfedi valós preferenciáit.

Sajnos erre az alkalmazott felvételi eljárás során nem, vagy csak igen komoly anyagi áldozatok árán van lehetősége. Mivel a megadott jelentkezések száma szerint kell növekvő összeget fizetni az eljárásért, a hallgatók többsége csak minimális számú jelentkezést ad meg. Bár ekkor is létezik olyan Nash-egyensúlya a preferencia-választási játéknak, ami stabil párosítást eredményez az erdeti preferenciák szerint is. Ugyan vajmi kevés esélyt látunk erre, amennyiben a szakok preferenciái Ergin-aciklikusak, ez minden egyensúlyra igaz.

Mit jelent az, hogy a preferencia-választási játék valamely Nash-egyensúlyához tartozó párosítás stabil? A hallgatók képesek úgy *manipulálni* preferenciáikat, hogy a megadott preferenciák egyensúlyban vannak és ugyanakkor a kapott párosítás stabil, tehát minden hallgató az általa elérhető legjobb szakra kerül felvételre. Az ilyen egyensúly elérésének koordinációs, információs feltételei a felsőoktatási felvételi során nem teljesülnek. Marad a valóstól többnyire eltérő, taktikázva, spekulálva meghatározott preferenciák megadása, mely a legritkább esetben vezet a kívánt stabilitáshoz. A stabilitás hiánya, de legalább annyira a folyamat, ahol a hallgató képtelennek érezheti magát a jó stratégia megválasztására. Az okozott frusztráció ráadásul teljesen felesleges, hiszen nem a felvételi része, pusztán a felvételi eljárás lebonyolításából adódik.

Irodalomjegyzék

ABDULKADIROĞLU, A., P. A. PATHAK, ÉS A. E. ROTH (2005): „The New York City High School Match," *American Economic Review*, 95(2), 364–367.

ABDULKADIROĞLU, A., P. A. PATHAK, A. E. ROTH, ÉS T. SÖNMEZ (2005): „The Boston Public School Match," *American Economic Review*, 95(2), 368–371.

ABDULKADIROĞLU, A., P. A. PATHAK, A. E. ROTH, ÉS T. SÖNMEZ (2006): „Changing the Boston School Choice Mechanism," Boston College Working Papers in Economics 639, Boston College, Department of Economics.

ABDULKADIROĞLU, A., ÉS T. SÖNMEZ (2003): „School Choice: A Mechanism Design Approach," *American Economic Review*, 93(3), 729–747.

ALCALDE, J. (1996): „Implementation of Stable Solutions to Marriage Problems," *Journal of Economic Theory*, 69(1), 240 – 254.

BIRÓ, P. (2007): „Higher Education Admission in Hungary by a Score-limit Algorithm," The 18th International Conference on Game Theory at SUNY at Stony Brook.

——— (2008): „Student Admissions in Hungary as Gale and Shapley Envisaged," Technical Report TR-2008-291, University of Glasgow, Department of Computing Science, Glasgow.

BÍRÓ, P., ÉS T. FLEINER (2008): „A magyarországi felvételi besoroló algoritmusok rövid bemutatása," Kézirat.

BRAUN, S., N. DWENGER, ÉS D. KÜBLER (2007): „Telling the Truth May Not Pay Off: An Empirical Study of Centralised University Admissions in Germany," IZA Discussion Papers 3261, Institute for the Study of Labor (IZA).

ERDIL, A., ÉS H. ERGIN (2008): „What's the Matter with Tie-Breaking? Improving Efficiency in School Choice," *American Economic Review*, 98(3), 669–689.

ERGIN, H., ÉS T. SÖNMEZ (2006): „Games of school choice under the Boston mechanism," *Journal of Public Economics*, 90(1–2), 215–237.

ERGIN, H. I. (2002): „Efficient Resource Allocation on the Basis of Priorities," *Econometrica*, 70(6), 2489–2497.

GALE, D., ÉS L. SHAPLEY (1962): „College admissions and the stability of marriage," *American Mathematical Monthly*, 69, 9–15.

HAERINGER, G., ÉS F. KLIJN (2009): „Constrained School Choice," *Journal of Economic Theory*, Megjelenés alatt.

KAGEL, J. H., ÉS A. E. ROTH (2000): „The Dynamics of Reorganization in Matching Markets: A Laboratory Experiment Motivated by a Natural Experiment," *The Quarterly Journal of Economics*, 115(1), 201–235.

KÓCZY, L. Á. (2008): „A stabil párosítások szakirodalmának, ezen belül a felvételi rendszerek elemzéséhez kapcsolódó eredmények összefoglalása és ismertetése," „A közoktatás teljesítményének mérése-értékelése, az iskolák elszámoltathatósága" programjának 1401. számú produktuma, Magyar Tudományos Akadémia, Közgazdaságtudományi Intézet, Budapest.

ROMERO-MEDINA, A. (1998): „Implementation of stable solutions in a restricted matching market," *Review of Economic Design*, 3(2), 137–147.

ROTH, A. E. (1984): „The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory," *Journal of Political Economy*, 92(6), 991–1016.

——— (1985): „The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem," *Journal of Economic Theory*, 36(2), 277–288.

——— (1986a): „On the allocation of residents to rural hospitals: A general property of two-sided matching markets," *Econometrica*, 54(2), 425–27.

——— (1986b): „On the Non-transferable Utility Value," *Econometrica*, 54(4), 981–984.

——— (1991): „A Natural Experiment in the Organization of Entry-Level Labor Markets: Regional Markets for New Physicians and Surgeons in the United Kingdom," *American Economic Review*, 81(3), 415–440.

ROTH, A. E., ÉS E. PERANSON (1997): „The effects of the change in the NRMP matching algorithm," *Journal of the American Medical Association*, 278(9), 729–732.

——— (1999): „The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design," *American Economic Review*, 89(4), 748–780.

TEO, C.-P., J. SETHURAMAN, ÉS W.-P. TAN (2001): „Gale-Shapley Stable Marriage Problem Revisited: Strategic Issues and Applications," *Management Science*, 47(9), 1252–1267.